



# Geração Sólitons Ópticos por Meio de Potenciais Ópticos Não Lineares e Análise Numérica

## Generation of Optical Solitons through Nonlinear Optical Potentials and Numerical Analysis

Eduardo de Assis Pereira<sup>1</sup>, Antônio Carlos Amaro de Faria Junior<sup>2</sup>

### RESUMO

Neste estudo, investigou-se o comportamento de potenciais óticos visando a geração de sólitons como soluções para a equação não-linear de Schrödinger. A pesquisa baseou-se em trabalhos prévios de C. M. Bender, S. Boetcher e Musslimani, que exploraram sistemas não-hermitianos com simetria  $PT$  (inversão de paridade espacial e inversão temporal), visando identificar autoenergias reais. Utilizando análises numéricas da equação não-linear de Schrödinger com potenciais simétricos e periódicos, empregando o software MATLAB, o estudo revelou a presença de solitons estáveis em sistemas óticos não lineares. Esses resultados são relevantes para a ótica não linear, uma vez que os sólitons têm aplicações significativas em comunicações óticas avançadas, onde a transmissão de informações exige a minimização de distorções e a preservação de pulsos óticos ao longo de longas distâncias. Além disso, o algoritmo desenvolvido poderá ser aplicado em novos potenciais. Assim, este estudo contribuiu para a compreensão das propriedades das ondas solitônicas em sistemas óticos e abre caminho para possíveis aplicações futuras.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sólitons. Ótica. Potenciais óticos. Quântica.

### ABSTRACT

In this study, the behavior of optical potentials was investigated with the aim of generating solitons as solutions to the nonlinear Schrödinger equation. The research was based on previous works by C. M. Bender, S. Boetcher, and Musslimani, which explored non-Hermitian systems with  $PT$  symmetry (spatial parity and time reversal), aiming to identify real eigenvalues in this context. Using numerical analyses of the nonlinear Schrödinger equation with symmetric and periodic potentials, employing the MATLAB software, the study revealed the presence of stable solitons in nonlinear optical systems. These results are relevant to nonlinear optics since solitons have significant applications in advanced optical communications, where information transmission requires the minimization of distortions and the preservation of optical pulses over long distances. Furthermore, the developed algorithm can be applied to new potentials. Thus, this study contributed to the understanding of solitonic wave properties in optical systems and paves the way for potential future applications.

**Keywords:** Solitons. Optica. Optical Potentials. Quantum physics

### INTRODUÇÃO

Um dos princípios da Mecânica Quântica é que para cada variável dinâmica um operador hermitiano está associado, cujo autovalores indicam valores possíveis para esta variável. Assim, de acordo com este princípio, sendo o hamiltoniano  $H$  um operador hermitiano tem-se a garantia de

<sup>1</sup> Bolsista PIBITI/CNPq. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil. E-mail: [eduardopereira@alunos.utfpr.edu.br](mailto:eduardopereira@alunos.utfpr.edu.br). ID Lattes: 2191955873356172.

<sup>2</sup> Docente no COEME-GP. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Guarapuava, Paraná, Brasil. E-mail: [antonioac@utfpr.edu.br](mailto:antonioac@utfpr.edu.br). ID Lattes: 3414863900455895.



que os autoestados (autoenergias) sejam reais e assim permitindo que essa quantidade seja medida experimentalmente.

No entanto, os trabalhos de C. M. Bender e S. Boetcher, na década de 1990, descreveram que para uma hamiltoniana com simetria de paridade e de reversão temporal ( $PT$ ), ou seja, invariante em um deslocamento espaço-tempo, também possui espectro real de energia. Dessa forma, a hermiticidade do operador hamiltoniano pode ser substituída pela simetria  $PT$ .

A aplicação dos operadores de paridade-tempo,  $\hat{P}\hat{T}$ , para um determinado potencial  $V$  implica em :  $V(x) = V^*(-x)$ . Na ótica, o índice de refração não linear  $n(x)$  é o potencial ótico.

$$n(x) = n_0(x) + n_R(x) + n_I(x) \quad (1)$$

Onde  $n_0$  é uma constante que representa o índice de refração linear e a parte não-linear do índice de refração é composta pela parte real  $n_R$  e imaginária  $n_I$ . Com o Hamiltoniano tendo uma simetria  $PT$ , então  $n_R$  é uma função par que caracteriza um perfil de guia de onda uniforme na direção transversal e  $n_I$  é uma função ímpar que indica uma distribuição de ganho e perda.

Para que a simetria  $PT$  seja satisfeita deve-se obter:

$$n(x) = n^*(-x) \quad (2)$$

$$n_R(x) = n_R^*(-x) \quad (3)$$

$$n_I(x) = n_I^*(-x) \quad (4)$$

A equação não-linear e normalizada de Schrodinger (5) é o ponto de partida para a nossa análise que consistirá de testar potenciais que forneçam possíveis soluções solitônicas para a propagação de ondas óticas.

$$i \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + [V(x) + iW(x)] + |\psi|^2 \psi = 0 \quad (5)$$

Onde  $\psi$  é proporcional ao campo elétrico e  $V$  e  $W$  são as componentes reais e imaginárias para o potencial simétrico  $PT$ .

Para a Equação (5), procuramos soluções do tipo sólitons no seguinte modelo (6):

$$\psi(x,z) = \phi_{kn}(x) e^{i\lambda z} \quad (6)$$

Em que  $\phi_{kn}$  é o modo não linear e  $\lambda$  é o autovalor correspondente a uma propagação real constante.

Substituindo a solução (6) na Equação (5), obtemos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + [V(x) + iW(x)] + |\phi|^2 \phi = \lambda \phi \quad (7)$$

Considerando o exposto até aqui, Hamiltonianos não-hermitianos podem possuir espectro de energia real desde que possuam a simetria de paridade-tempo. Assim, examinaremos possíveis potenciais com simetria  $PT$  a fim de obter soluções estáveis do tipo sólitons em redes óticas.



Neste trabalho, será estudado a não linearidade ótica com sistemas periódicos que podem exibir características advindas de configurações com esse tipo de simetria.

## MÉTODO

No estudo detalhado neste artigo, foram investigadas estruturas de bandas em relação a potenciais periódicos. Para realizar essas análises, utilizou-se a versão do software MATLAB disponibilizada pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

Resumidamente, o estudo envolveu simulações computacionais de potenciais previamente estudados com base nas referências adotadas nesta pesquisa. O objetivo principal foi obter a estrutura de bandas correspondente a esses potenciais por meio de um algoritmo desenvolvido internamente e implementado no MATLAB. Especificamente, o método numérico empregado nesse algoritmo foi o Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). Essa abordagem permitiu a análise das propriedades das estruturas de bandas em sistemas com potenciais periódicos, contribuindo para um melhor entendimento desses sistemas.

## RESULTADOS

Para o estudo da interação da luz com estruturas periódicas, iniciamos pela compreensão do comportamento da Equação (7) em dois potenciais complexos com simetria PT.

$$V1(x) = 4(\cos^2(x) + V_0i \sin(2x)) \quad (8)$$

$$V2(x) = \cos^2(x) + V_0i \sin(2x) \quad (9)$$

Esses potenciais já foram estudados por Hesketh (2010) e Musslimani (2008) e assim devemos encontrar resultados semelhantes partindo do algoritmo desenvolvido.

Para um potencial *PT* com estrutura periódica é interessante analisar a estrutura de banda. Procuramos soluções da forma da Equação (6) onde  $\lambda$  é associada aos autovalores reais.  $\lambda$  está em função do momento de Bloch  $k$  que por sua vez está entre  $-\frac{\pi}{D} \leq k \leq \frac{\pi}{D}$  onde  $D$  é o período de rede. Considera-se aqui  $D = \pi$ .

Para determinar  $\lambda(k)$ , primeiro é necessário reduzir a ordem da Equação (7). Assim, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\phi(x) = U(x) \quad (10)$$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = U'(x) \quad (11)$$

$$\frac{dU(x)}{dx} = U'(x) \quad (12)$$

Combinando as Equações (7), (10), (11) e (12):



$$\frac{dU'(x)}{dx} = (-V(x) + \lambda(k))U(x) \quad (13)$$

$$\frac{dU(x)}{dx} = U'(x) \quad (14)$$

Que apresenta soluções em duas condições iniciais diferentes:  $U(0) = 1, U'(0) = 0$  e  $U(0) = 0, U'(0) = 1$ . Então, para um valor de  $\lambda(k)$  e para este potencial, a Equação (7) pode ser resolvida numericamente com o método Runge-Kutta de quarta ordem. Entre essas duas soluções possíveis, o momento de Bloch  $k$  apresenta a seguinte relação:

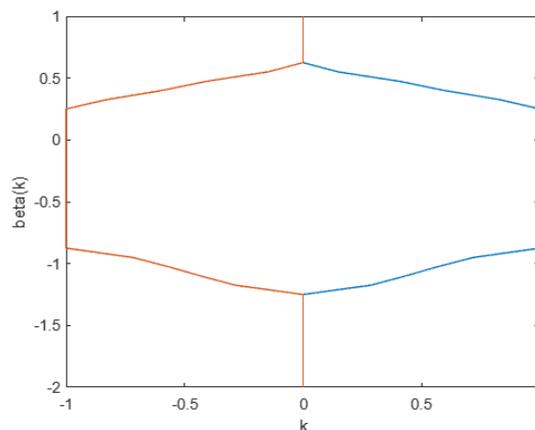
$$\cos(k\pi) = \frac{1}{2}(U_1(\pi) + U_2'(\pi)) \quad (15)$$

Assim, para  $k(\lambda)$ :

$$k(\lambda) = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{2}U_1(\pi) + \frac{1}{2}U_2'(\pi)\right) \quad (16)$$

Plotando o gráfico de  $k(\lambda)$ , observamos o espectro de autovalores fisicamente significativos na região  $-1 \leq k \leq 1$ . Veja a Figura (1) e a Figura (2)

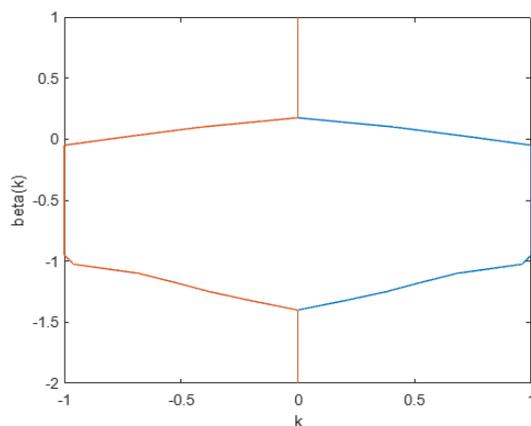
**Figura 1 – potencial  $V_1(x)$  e amplitude  $V_0 = 0.5$**



Fonte: Autoria própria (2023).

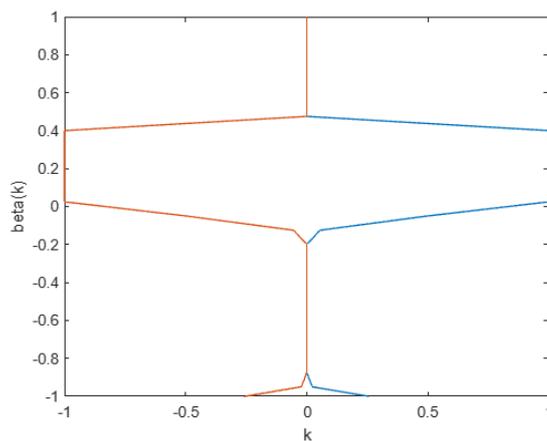


Figura 2 – potencial  $V1(x)$  e amplitude  $V_0 = 0.3$



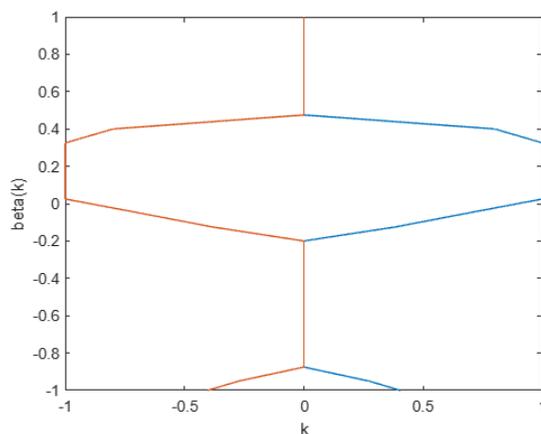
Fonte: Autoria própria (2023).

Figura 3 – potencial  $V2(x)$  e amplitude  $V_0 = 0.45$



Fonte: Autoria própria (2023).

Figura 4 – potencial  $V2(x)$  e amplitude  $V_0 = 0.6$



Fonte: Autoria própria (2023).



O algoritmo desenvolvido ainda precisa ser aperfeiçoado para que se aproxime dos resultados já obtidos e validados em pesquisas da área. Dessa forma, encontrar as estruturas de banda semelhantes aos trabalhos de Hesketh (2010) e Musslimani (2008) atestam que o algoritmo é satisfatório e poderá ser aplicado em novos potenciais.

## CONCLUSÃO

Sistemas ópticos que envolvem redes periódicas e apresentam efeitos difrativos não lineares, mesmo quando não seguem a propriedade hermitiana, mas mantêm a simetria de paridade espacial e a simetria de reversão temporal, têm despertado um grande interesse. Isso ocorre porque esses sistemas têm a capacidade de gerar pulsos ópticos com perdas mínimas de energia, o que é extremamente valioso em aplicações de comunicação óptica e processamento de informações.

Nesse contexto, esta pesquisa teve como objetivo principal fornecer uma visão inicial das características analíticas desses sistemas, estabelecendo as bases para possíveis aplicações futuras em fibras ópticas e dispositivos ópticos avançados. Para alcançar esse objetivo, foi essencial obter as estruturas de bandas para os potenciais ópticos estudados.

Além disso, está nos planos da pesquisa uma análise mais profunda do modelo matemático do ponto de vista numérico, dos potenciais estudados. Isso permitirá uma compreensão mais completa desses potenciais ópticos e também a oportunidade de testar e validar experimentalmente as previsões teóricas, o que é crucial para sua aplicação prática. Em resumo, esta pesquisa visa contribuir para o avanço da óptica não linear e suas aplicações futuras.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao PROPPG pela bolsa de Iniciação Científica (Edital PROPPG 2022/2023 - PIBIT) concedida.

## CONFLITO DE INTERESSE

Não há conflito de interesse.

## REFERÊNCIAS

- HESKETH, Graham D. **PT -Symmetric Optical Lattices**. 2010. 51 f. Dissertação – Physics Department, Imperial College, London SW7, London, UK, set. 2010.
- MUSSLIMANI, Z. H. Optical Solitons in PT Periodic Potentials. **The American Physical Society**, jan. 2008. DOI: [10.1103/PhysRevLett.100.030402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.030402).