Uma introdução à teoria de anéis e módulos

An Introduction to Ring and Module Theory

Matheus Gonçalves Silveira[1], Anderson Paião dos Santos [2]

RESUMO

A Álgebra Homológica é uma subárea da álgebra abstrata que originou-se dos métodos da Topologia Algébrica, e que trata de resultados algébricos válidos para diferentes tipos de espaços. Em 1941, os matemáticos Mac Lane e Eilenberg descobriram ligações entre o estudo de extensão de grupos com alguns grupos de homologia. Dentre os matemáticos que contribuíram para o progresso do métodos da Álgebra Homológica que são estudados até hoje, destacamos Mac Lane, que introduziu o conceito de categorias abelianas, Henri Cartan e Samuel Eilenberg, que desenvolveram a teoria de funtores, e o matemático Grothendieck ganhador da medalha Fields em 1966. Um dos tópicos estudados em Álgebra Homológica é a teoria de módulos sobre anéis, que consiste em uma generalização do conceito de espaço vetorial, sendo este último uma estrutura sobre corpos. O presente trabalho tem como objetivo fazer uma breve apresentação do estudo realizado na Iniciação Científica, do conceito de módulos sobre um anel. Destacaremos também os conceitos de submódulo, homomorfismo de módulos e de sequência exata de módulos e homomorfismos.
PALAVRAS-CHAVE: Anéis. Módulos. Sequências Exatas.

ABSTRACT

Homological Algebra is a subfield of abstract algebra that originated from methods in Algebraic Topology and deals with algebraic results applicable to different types of spaces. In 1941, mathematicians Mac Lane and Eilenberg discovered connections between the study of group extensions and certain homology groups. Among the mathematicians who have contributed to the advancement of methods in Homological Algebra, and whose work is still studied today, we have Mac Lane, who introduced the concept of abelian categories, Henri Cartan and Samuel Eilenberg, who developed functor theory, and mathematician Grothendieck, a recipient of the Fields Medal in 1966.One of the topics studied in Homological Algebra is the theory of modules over rings, which constitutes a generalization of the concept of vector spaces, with the latter being a structure over fields. This work aims to provide a brief introduction to the research conducted in Scientific Initiation on the concept of modules over a ring. We will also highlight the concepts of submodule, module homomorphism, and exact sequence of modules and homomorphisms.
KEYWORDS: Rings. Modules. Exact Sequences.

INTRODUÇÃO

A Álgebra Homológica é uma subárea da álgebra abstrata que se originou dos métodos da Topologia Algébrica, e que trata de resultados algébricos válidos para diferentes tipos de espaços.

Em 1941, os matemáticos Mac Lane e Eilenberg descobriram ligações entre o estudo de extensão de grupos com alguns grupos de homologia, através disso publicaram o artigo Teoria de Categorias que passou a ter grande influência na álgebra homológica.

[1] Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. E-mail: matheusgoncalves@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 3105377858197240 .

[2] Docente da Licenciatura em Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. E-mail: andersonsantos@utfpr.edu.br. ID Lattes: 5070545194057569.

Um pouco mais a frente, em 1948, Mac Lane introduziu o conceito de categorias abelianas, que permitia generalizar conceitos de homologia e cohomologia de grupos abelianos.

Em seguida Henri Cartan e Samuel Eilenberg desenvolveram a teoria de funtores em seu famoso livro Homological Algebra, o mesmo serviu de inspiração para o matemático Grothendieck, que generalizou os conceitos vistos no livro, e assim em 1966 ganhou a medalha Fields.

Um dos assuntos estudados em Álgebra Homológica é a teoria de módulos sobre anéis, que consiste em uma generalização do conceito de espaço vetorial, o qual é uma estrutura sobre corpos.

Este trabalho tem como objetivo apresentar o conceito de módulo sobre um anel fruto dos estudos realizados na Iniciação Científica. As referencias utilizadas são (DOMINGUES H. H.; IEZZI, 2003), (COELHO; LOURENCO, 2018), (HU, 1968) e (MILES, 2018).

METODOLOGIA

Para atingir os objetivos estabelecidos, foram realizadas apresentações de seminários que ocorreram semanalmente. Onde começamos com o estudo da teoria de grupos e anéis com definições e exemplos que serviram como uma revisão para adentrar ao conteúdo de módulo.

Já em um segundo momento foi estudado a teoria de módulos sobre anéis, que é o objetivo dos estudos de iniciação científica, através de definições, exemplos e propriedades sobre o tema. Também fizemos o estudo de submódulos e homomorfismos de módulos.

Em seguida realizamos e estudo de sequências exatas de módulos e homomorfismos.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

O conceito de módulo sobre um anel A é uma generalização natural do conceito de espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e é utilizado como ferramenta em algumas áreas da matemática, dentre as quais destacamos a Topologia Algébrica. Na sequência apresentamos o conceito de módulo sobre uma anel e também apresentamos alguns exemplos.

Definição 0.1 *Seja A um anel com unidade. Um conjunto não vazio M é denominado um **módulo à esquerda sobre** A (ou um A-módulo a esquerda) se M é um grupo abeliano em relação a uma operação, que indicaremos por $+$, e esta definida uma lei de composição externa que a cada par $(\alpha, m) \in A \times M$ associa um elemento $\alpha m \in M$ e tal que, para todos $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ e todos $m_1, m_2 \in M$ verifica:*

(i) $\alpha_1(\alpha_2 m_1) = (\alpha_1\alpha_2)m_1$

(ii) $\alpha_1(m_1 + m_2) = \alpha_1 m_1 + \alpha_1 m_2$

(iii) $(\alpha_1 + \alpha_2)m_1 = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_1$

(iv) $1 \cdot m_1 = m_1$.

Do conceito anterior, apresentamos os seguintes exemplos de módulos:

Exemplo 0.2 *Todo espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um $\mathbb{K}$-módulo. Para isto basta verificar em qualquer livro de Álgebra Linear os axiomas exigidos para que um conjunto tenha uma estrutura de espaço vetorial.*

Exemplo 0.3 *Todo grupo abeliano G pode ser considerado como um módulo sobre o anel $\mathbb{Z}$ dos números inteiros definindo o produto de um inteiro a por um elemento $g \in G$ por:*

$$ng = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n = 0 \\ \underbrace{g + g + \cdots + g}_{n \ vezes}, & \text{se} \quad n > 0 \\ \underbrace{(-g) + (-g) + \cdots + (-g)}_{n \ vezes}, & \text{se} \quad n < 0 \end{cases}$$

Exemplo 0.4 *Seja I um ideal a esquerda de um anel A. Então I admite uma estrutura de A-módulo com a soma de A e a multiplicação por escalares definida pela multiplicação de A.*

SUBMÓDULO

Definição 0.5 *Seja M um A-**módulo**. Um subconjunto $N \subset M$ diz-se um A-submódulo de M, ou simplesmente, um submódulo se:*

(i) N *é um subgrupo aditivo de* M,

(ii) N *é fechado em relação a multiplicação por escalares, isto é, para todo $a \in A$ e todo $n \in N$, tem-se que, $an \in N$,*

isto é um subconjunto não vazio $N \subset M$ é um submódulo se, e somente se,

(i) $\forall n, n' \in N, n + n' \in N,$

(ii) $\forall a \in A, \forall n \in N,$ *tem-se que* $an \in N$.

Exemplo 0.6 *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um subconjunto $S \subset V$ é um submódulo se, e somente se, S é um subespaço de V.*

Exemplo 0.7 *Se N_1 e N_2 são submódulos de um A-módulo M, o conjunto*

$$N_1 + N_2 = \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}$$

também é um submódulo de M chamado submódulo soma de N_1 e N_2. De fato, para todo $a+b, c+d \in N$ e $\alpha \in A$, com $a,c \in N_1$ e b, $d \in N_2$ temos que:

(i) $(a+b) - (c+d) = (a+b) + (-c-d) = (a-c) + (b-d) \in N_1 + N_2$. *Como N_1, N_2 são submódulos, então $a - c \in N_1$ e $b - d \in N_2$.*

(ii) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b \in N_1 + N_2$.

Exemplo 0.8 *Seja G um grupo abeliano. Temos que $\mathbb{Z}-$submódulo de G são precisamente os seus subgrupos.*

HOMOMORFISMO DE MÓDULOS

Definição 0.9 *Sejam M e N dois A-módulos. Uma função $f : M \to N$ diz-se um homomorfismo de A-módulos ou um A-**homomorfismo** se para todos $m_1, m_2 \in M$ e todo $a \in A$ se verifica:*

(i) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$;

(ii) $f(am_1) = af(m_1)$.

Exemplo 0.10 *Se A é um corpo, os A-homomorfismos são as transformações lineares entre os espaços vetoriais sobre A.*

Exemplo 0.11 *Os homomorfismos de grupos abelianos são precisamente os $\mathbb{Z}$-homomorfismo.*

Exemplo 0.12 *Seja N um submódulo de um A-módulo M. Define-se o homomorfismo canônico ou projeção canônica ao quociente $j : M \to M/N$ por*

$$j(m) = m + N, \text{para todo } m \in M.$$

Podemos verificar que j é efetivamente um A-homomorfismo. Com efeito, para todo m_1,$m_2 \in M$ e para todo $a \in A$ verifica-se:

(i) $j(m_1 + m_2) = (m_1 + m_2) + N = (m_1 + N) + (m_2 + N) = j(m_1) + j(m_2)$;

(ii) $j(a \cdot m_1) = a \cdot m_1 + N = a \cdot (m_1 + N) = a \cdot j(m_1)$.

SEQUÊNCIA EXATA

Uma sequência exata é um conceito importante na matemática, particularmente na área de álgebra homológica e topologia. Ela consiste em expressar as relações entre determinados homomorfismos por meio de diagramas.

Definição 0.13 *Seja $\ldots, M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, \ldots$ uma família infinita de A-módulos e $\ldots, f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}, \ldots$ uma família de A-homomorfismos. Diz-se que o diagrama:*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

é uma sequência exata se é exata em M_i para todo $i \in I$, isto é, se $Im(f_{i-1}) = Ker(f_i)$, para todo $i \in L$.

Exemplo 0.14 *A sequência $0 \xrightarrow{g} E \xrightarrow{f} F$ é exata se, e somente se, f é um A-monomorfismo. De fato, se a sequência é exata então $Im(g) = Ker(f)$, e g é homomorfismo nulo, então $Im(g) = 0$. Sendo assim pela definição de sequência exata, temos*

$$Ker(f) = \{0\}$$

portanto f é monomorfismo.

Exemplo 0.15 *A sequência* $0 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} 0$ *é exata se, somente se,* $M = 0$*. De fato, como* f *e* g *são o homomorfismo nulo, temos que* $Im(f) = \{0\}$ *e* $Ker(g) = M$*. Daí, como a sequência é exata, segue que* $M = Ker(g) = Im(f) = \{0\}$*. Reciprocamente, se* $M = 0$*, então* $Im(f) = Ker(g) = 0$*, ou seja, a sequência é exata.*

Definição 0.16 *Consideramos agora os seguintes diagramas:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\theta"'] & F \arrow[d, "\psi"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[r, "k"] & Q \end{tikzcd}$$

O primeiro diagrama diz-se comutativo se $\theta = \psi \circ \varphi$*. Da mesma forma, o segundo diagrama diz-se comutativo se* $g \circ f = k \circ h$*.*

Teorema 0.17 *(Lema dos Quatro) Seja*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[d, "\delta"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \end{tikzcd}$$

um diagrama de homomorfismo de A*-módulos, onde as duas filas são sequências exatas, os três quadrados são comutativos,* α *é um epimorfismo,* δ *é um monomorfismo, temos que:*

(i) $Im(\beta) = g'^{-1}[Im(\gamma)]$;

(ii) $Ker(\gamma) = g[Ker(\beta)]$.

Corolário 0.18 *(Lema dos Cinco) Seja*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \arrow[r, "k'"] & E' \end{tikzcd}$$

um diagrama de homomorfismo de A*-módulos, onde as duas filas são sequências exatas e os quatro quadrados são comutativos. Se* α, β, δ *e* ϵ *são isomorfismos logo* γ *também será.*

CONCLUSÕES

Os estudos de tópicos de Álgebra Homológica é um caminho natural após estudos de conceitos de grupos, anéis e corpos, que são abordados na disciplina de Álgebra. Através da Iniciação Científica eu conseguir realizar um estudo mais aprofundado sobre os conceitos de Álgebra Homológica, visando aprender a teoria de módulos sobre um anel, que foi muito útil para minha formação.

Agradecimentos

Agradeço minha família por me apoiar durante toda trajetória da graduação. Aos meus colegas de curso e professores que sempre me apoiaram e estiveram ao meu lado, em especial o meu orientador Prof. Dr. Anderson Paião dos Santos.

Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

COELHO, Flávio U.; LOURENCO, Mary L. **Um Curso de Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Editora da USP, 2018.

DOMINGUES H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4. ed. São Paulo: Atual editora, 2003.

HU, S.-T. **Introduction to Homological Algebra**. 1. ed. Los Angeles: Holden-Day, 1968.

MILES, César Polcino. **Anéis e Módulos**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2018.