



Resolução de EDPS pelo método dos volumes finitos em malhas não estruturadas triangulares

Solution of PDES using the finite volume method on unstructured triangular meshes

Maria Fernanda Crisostomo dos Santos¹, Gylles Ricardo Ströher²

RESUMO

O presente estudo aborda o desenvolvimento de um código computacional destinado à resolução de Equações Diferenciais Parciais Elípticas (EDPE) empregando o Método dos Volumes Finitos (MVF) em malhas não estruturadas compostas por elementos triangulares. Este estudo concentrou-se na análise da ordem de convergência do esquema de discretização Over-Relaxed, em relação ao grau de distorção dos elementos na malha. Os resultados obtidos demonstram que o método numérico, ao utilizar o Método dos Volumes Finitos em malhas não estruturadas, obteve êxito na resolução de uma equação diferencial elíptica bidimensional. A qualidade da malha desempenha um papel de destaque na precisão dos resultados, conforme mostra a literatura. Além disso, a metodologia aplicada neste estudo revelou uma sensibilidade desfavorável ao grau de distorção das malhas, resultando em uma ordem de convergência inferior ao esperado. Embora, o Método dos Volumes Finitos tenha mostrado ser eficaz na resolução de EDPEs, é essencial considerar cuidadosamente a geração e otimização das malhas para maximizar o desempenho do método.

PALAVRAS-CHAVE: EDP; Malhas não estruturadas; MVF.

ABSTRACT

The present study addresses the development of a computational code aimed at solving Elliptic Partial Differential Equations (EPDEs) using the Finite Volume Method (FVM) on unstructured grids composed of triangular elements. This study focused on the analysis of the convergence order of the Over-Relaxed discretization scheme concerning the degree of distortion of elements within the mesh. The results obtained demonstrate that the numerical method, when utilizing the Finite Volume Method on unstructured grids, successfully resolved a two-dimensional elliptic differential equation. Mesh quality plays a prominent role in result accuracy, as indicated by the literature. Furthermore, the methodology applied in this study revealed an unfavorable sensitivity to mesh distortion, resulting in a lower-than-expected convergence order. Although the Finite Volume Method has proven to be effective in solving EPDEs, careful consideration of mesh generation and optimization is essential to maximize method performance.

KEYWORDS: PDE; Unstructured grids; FVM.

¹ Maria Fernanda Crisostomo dos Santos. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: mfcrisostomosantos@gmail.com. ID Lattes: 6177103767784671.

² Gylles Ricardo Ströher. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: gyllesrs@gmail.com. ID Lattes: 1839299911715672.



INTRODUÇÃO

Simulação é o ato de desenvolver um modelo matemático do sistema em análise e conduzir experimentos associados, muitos dos quais se desenrolam em ambientes virtuais hospedados por computadores. Isso assegura a não interferência ou perturbação dos processos vigentes, ao mesmo tempo que viabiliza análises de projetos sem a necessidade de sua concretização física (PRITSKER, 1986). Essa progressão na área de simulação resultou na capacidade de criar malhas adaptativas com mecanismos de detecção de erros, assegurando, assim, a qualidade da solução obtida (MALISKA, 2019).

As malhas estruturadas e não estruturadas são utilizadas em métodos numéricos para discretização de domínios. As malhas estruturadas são formadas por elementos regulares, como quadrados ou hexágonos. Já as malhas não estruturadas são formadas por elementos irregulares, como triângulos ou tetraedros (GONÇALVES, 2007)

As malhas não estruturadas são mais vantajosas em muitos casos, pois permitem a aplicação de métodos numéricos em geometrias complexas e irregulares. O Método dos Volumes Finitos (MVF) é um método numérico que pode ser aplicado em malhas não estruturadas para resolver equações diferenciais parciais. O MVF consiste em dividir o domínio em volumes de controle e aplicar as leis da conservação de massa, momento e energia em cada volume (GUIMARÃES, 2003).

Nesse cenário, o presente trabalho expõe os resultados de um código computacional que emprega o MVF em simulações de malhas não estruturadas, usando elementos triangulares. Os resultados obtidos são então contrastados com uma solução analítica de referência.

METODOLOGIA

O teorema da divergência de Gauss é usado para converter integrais de volume sobre operadores de divergência e gradiente às integrais de superfície e é dado por:

$$\iint_A \nabla(T) dA = \oint T dS \quad (1)$$

Em que: $\nabla(T)$ representa o operador divergente. Uma equação diferencial parcial elíptica pode ser dada por:

$$\nabla(k \cdot \nabla(T)) + F = 0 \quad (2)$$

Em que: k é um coeficiente de difusão e F representa o termo Fonte.

Integrando a Eq.(2) no volume de controle bidimensional C :

$$\iint \nabla(k \cdot \nabla(T))dA + \iint F dA = 0 \quad (3)$$

No qual, a partir do esquema *Over-Relaxed* apresentado em Moukalled e Mangani (2016) e realizando as substituições necessárias pode-se rearranjar a Eq. (3) para a Eq. (4).

$$\left(-\frac{(E)_{f1}}{dCF_1} - \frac{(E)_{f2}}{dCF_2} - \frac{(E)_{f3}}{dCF_3} + \frac{Sp \cdot A}{k} \right) T_c + \frac{(E)_{f1} \cdot (T_{F1})}{dCF_1} (\nabla(T))_{f1} \cdot (H)_{f1} + \frac{(E)_{f2} \cdot (T_{F2})}{dCF_2} + (\nabla(T))_{f2} \cdot (H)_{f2} + \frac{(E)_{f3} \cdot (T_{F3})}{dCF_3} + (\nabla(T))_{f3} \cdot (H)_{f3} + \frac{A \cdot Sc}{k} \quad (4)$$

Em que E_f é a multiplicação entre o vetor unitário da distância e o vetor área e o H_f é a diferença entre o vetor área e E_f .

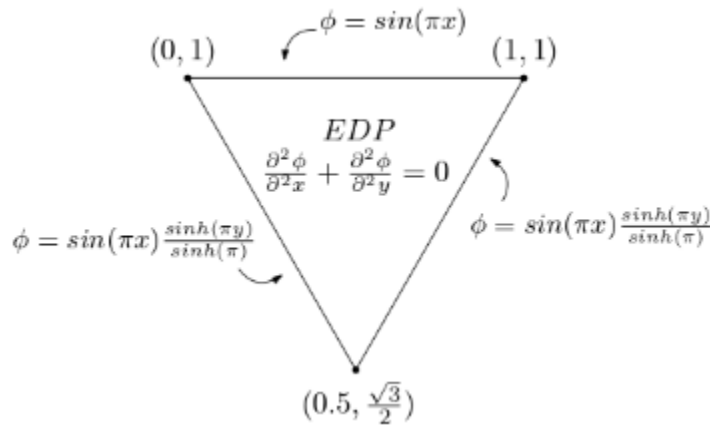
A Eq.(5) pode ser aplicada para os volumes internos, enquanto para os volumes que se localizam no contorno do domínio foi utilizado o esquema de média ponderada dado por:

$$T_c = \frac{\sum_{i=1}^3 \frac{T_{vi}}{\|r_c - r_{vi}\|}}{\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\|r_c - r_{vi}\|}} \quad (5)$$

Em que T_{vi} são os valores nos vértices e r_c e r_{vi} são os vetores posição do centroide do volume e dos vértices, respectivamente.

Para avaliar a ordem de convergência do método numérico implementado o problema definido na Figura 1 foi utilizado como caso controle.

Figura 1 – Desafio proposto



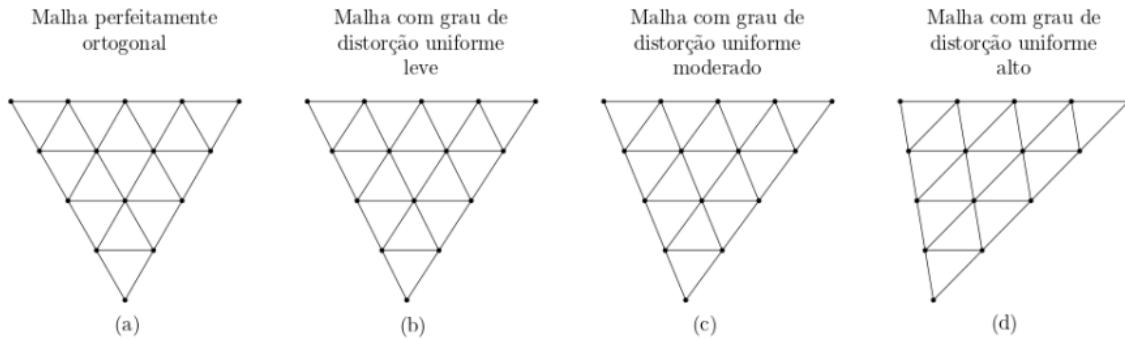
Fonte: Parizoto (2023)

Com o objetivo de aprimorar a análise, a cada ciclo de refinamento, cada triângulo na malha de entrada é subdividido em quatro triângulos menores na malha de saída, resultando em uma malha completamente ortogonal. Utilizou-se essa abordagem para criar malhas com diferentes tamanhos: 4, 16, 64, 256, 1024, 4096 e 16384 triângulos, que foram posteriormente deformadas.

A distorção de um elemento de malha é medida pela distância entre sua geometria atual e a forma equilátera de referência. Isso envolve a comparação dos ângulos internos e dos comprimentos dos lados do elemento com um triângulo equilátero de referência. O deslocamento do vértice inferior altera o domínio da Equação Diferencial Parcial (EDP), mas isso não afeta o problema em si, pois as condições de contorno e a solução analítica permanecem inalteradas. Isso resultaria em uma distorção uniforme entre todos os elementos, o que é comumente usado na literatura para manter a qualidade de malhas não estruturadas triangulares. O processo de distorção (D) dos elementos é calculado pela Eq. (6) e ilustrado na Figura 2.

$$D = \max \left[\frac{\theta_{max} - 60}{180 - 60}, \frac{60 - \theta_{min}}{60} \right] \quad (6)$$

Figura 2 – Representação visual do procedimento de distorção aplicado neste estudo.



Fonte: Parizoto (2023)

A ordem de convergência é um conceito essencial na análise numérica que avalia como o erro entre uma solução aproximada e a solução real diminui com o aumento das iterações em um método iterativo. Ela é frequentemente representada pelo parâmetro 'h' e desempenha um papel fundamental na avaliação da eficácia de um método, indicando a taxa de convergência.

A representação da malha (h) é obtida por meio da Eq. (7)

$$h = \left(\frac{|\Omega|}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Em que N se refere ao número de triângulos e Ω representa a área total do domínio.

Os cálculos do erro deste método foram retirados com base na literatura, sendo eles, E_2^h , E_α e RMSE.

Foi calculada uma estimativa para a ordem de convergência do erro associado a cada solução, e essa aproximação é expressa por:

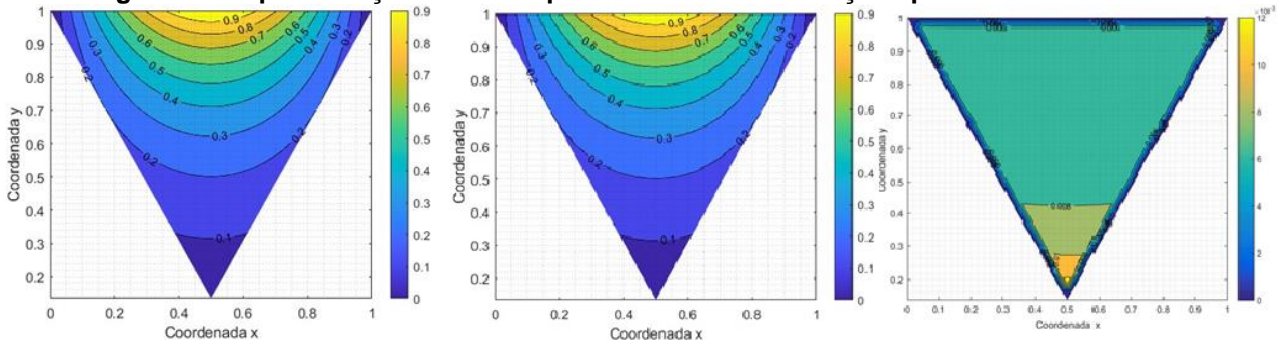
$$q_\theta = \frac{\log E_\theta^{h_2} - \log E_\theta^{h_1}}{\log h_2 - \log h_1} \quad (8)$$

Onde θ pode ser substituído por qualquer um dos erros apresentados anteriormente, sendo sempre o valor da iteração de elementos sucessora subtraída da anterior.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados da abordagem metodológica estão na Tabela 1. A Figura 2 mostra a solução numérica para o problema em uma malha ortogonal ($D = 0$), exibe a solução analítica e o erro percentual entre a solução numérica e a solução analítica é menor ou igual a 0,012%, respectivamente.

Figura 2 – Representação visual do procedimento de distorção aplicado neste estudo.



Fonte: Autoria Própria (2023).

Quanto à influência da distorção dos elementos da malha na ordem de convergência do esquema Over-Relaxed, os dados das Tabelas 1 e 2 mostram que, quando a distorção é zero, o esquema numérico atinge uma ordem de convergência próxima a 3, embora o método tenha uma ordem teórica de convergência de 2. Isso sugere que a implementação das condições de contorno e o nível de refinamento podem ter contribuído para a ordem superior observada. Por outro lado, em todos os outros casos com distorção maior que zero, a ordem de convergência diminuiu drasticamente, convergindo para a ordem unitária.

Figura 3 – Valores obtidos pelas simulações do problema proposto

Quantidade De Triângulos	Iterações	h	E_2^h	E_{RMS}^h	E_{∞}	RMSE	q_{E_2}	$q_{E_{RMS}}$	$q_{E_{\infty}}$	q_{RMSE}
D = 0										
4096	1871	0,01028	2,4E-06	3,7E-06	1E-05	8,8E-06	2,99	2,99	2,94	2,99
16384	3605	0,00514	3,1E-07	4,7E-07	1,3E-06	1,1E-06	2,97	2,97	2,97	2,97
D = 0.025										
4096	1944	0,01	0,00038	0,0006	0,00138	0,0014	1,04	1,04	1,02	1,04
16384	3769	0,005	0,00019	0,0003	0,00069	0,00069	1,02	1,02	1,01	1,02
D = 0.05										
4096	2000	0,00976	0,00071	0,00113	0,00257	0,00259	1,03	1,03	1,01	1,03
16384	3768	0,00488	0,00035	0,00056	0,00128	0,00128	1,01	1,01	1	1,01
D = 0.25										
4096	1998	0,00781	0,0026	0,0052	0,01053	0,00997	1,02	1,02	1,01	1,02
16384	3673	0,00391	0,00129	0,00258	0,00525	0,00494	1,01	1,01	1	1,01
D = 0.5										
4096	2248	0,00781	0,00306	0,00612	0,0128	0,01214	0,97	0,97	0,96	0,97
16384	4633	0,00391	0,00154	0,00309	0,00649	0,00613	0,99	0,99	0,98	0,99

Fonte: Autoria Própria (2023).

CONCLUSÃO

Os resultados mostram que o método numérico usando o Método dos Volumes Finitos em malhas não estruturadas foi bem-sucedido na resolução de uma equação diferencial elíptica bidimensional. Essa implementação bem-sucedida representa um avanço



significativo na capacidade de resolver equações diferenciais elípticas em geometrias complexas de duas dimensões. No entanto, é importante observar que a literatura reconhece a influência da qualidade da malha na precisão dos resultados e no aumento do custo computacional.

Além disso, a metodologia utilizada mostrou ser sensível à distorção das malhas, resultando em uma ordem de convergência inferior à idealmente esperada.

Disponibilidade de código

O código computacional elaborado não está disponível para terceiros.

Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Gylles Ricardo Stroher, por todo apoio e paciência.

REFERÊNCIAS

F. MOUKALLED, L. MANGANI, M.D., 2016. **The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics: An Advanced Introduction with OpenFOAM® and Matlab**. Fluid Mechanics and Its Applications 113. Springer. ISBN 3319168738, 9783319168739.

GONÇALVES, N. **Método dos Volumes Finitos em Malhas Não-Estruturadas**. Disponível em: <<https://core.ac.uk/download/pdf/302956015.pdf>>. Acesso em: 10 ago. 2023.

GUIMARÃES, C. **Modelagem computacional da biotransferência de calor no tratamento por hipertermia em tumores de duodeno através do método dos volumes finitos em malhas não-estruturadas**. Dissertação De Mestrado—UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO.

MALISKA, C. **Curso de Volumes Finitos - Prof. Maliska - 1.Introdução**. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=Olw0I9zL8ww&list=PLIPfGy5ZylmPkgpkbpOPXk2BT5zXb2hso>>. Acesso em: 5 jul. 2023.

PARIZOTO, Gabriel Henrique Silveira; STROHER, Gylles Ricardo. **Solução numérica de problemas elípticos por meio do método dos volumes finitos em malhas não estruturadas triangulares**. In: CONGRESSO NACIONAL DE ESTUDANTES DE ENGENHARIA MECÂNICA, 29., 2023, Goiânia. Goiânia: Abcm, 2023. p. 1-9.

PRITSKER, A. ALAN. B. **Introduction to Simulation and SLAM-II**. 3ed. New York: John Wiley & Sons, 1986