



## Sistemas de equações diferenciais como modelo matemático de circuitos elétricos com memristor

### Systems of differential equations as a mathematical model of electrical circuits with memristor

Beatriz dos Santos Martins<sup>1</sup>, Alisson de Carvalho Reinol<sup>2</sup>

#### RESUMO

Neste trabalho, são estudados de maneira qualitativa as soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias obtidas como modelo matemático de circuitos elétricos com um memristor como um de seus componentes. Inicialmente, são apresentados os conceitos fundamentais referentes ao estudo qualitativo de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares e com coeficientes constantes e, em seguida, é considerado o caso não-linear. São estudados os componentes fundamentais de um circuito elétrico: resistor, indutor, capacitor e memristor, conhecido como quarto elemento fundamental da eletrônica e cuja análise teórica possui grande importância, uma vez que ainda não é produzido em escala industrial. Por fim, é feita uma análise qualitativa das soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias não-linear obtido como modelo matemático de um circuito elétrico com um memristor.

**PALAVRAS-CHAVE:** circuitos elétricos; equações diferenciais ordinárias; memristores; retratos de fase.

#### ABSTRACT

In this work, the solutions of ordinary differential equation systems obtained as a mathematical model of electrical circuits with a memristor as one of their components, are qualitatively studied. Initially, fundamental concepts related to the qualitative study systems of linear ordinary differential equation systems with constant coefficients are presented, followed by the study of the nonlinear case. The fundamental components of an electrical circuit are investigated: resistor, inductor, capacitor, and memristor, known as the fourth fundamental element of electronics, and its theoretical analysis holds great importance, as it is not yet produced on an industrial scale. Finally, a qualitative analysis of the solutions of a systems of nonlinear ordinary differential equation system obtained as a mathematical model of an electrical circuit with a memristor is conducted.

**KEYWORDS:** electrical circuits; ordinary differential equations; memristors; phase portraits.

#### INTRODUÇÃO

As equações diferenciais ordinárias (EDO's) desempenham um papel crucial na descrição e análise de fenômenos que envolvem taxas de variação, sendo aplicadas em diversas áreas do conhecimento, dentre elas a engenharia. A modelagem de circuitos elétricos utilizando EDO's é de extrema importância na Engenharia Elétrica, pois permite analisar e projetar desde sistemas elétricos mais simples até os mais complexos. Livros de EDO, como Boyce e DiPrima (2020) e Zill (2016), costumam apresentar apenas uma breve introdução sobre esta aplicação das EDO's.

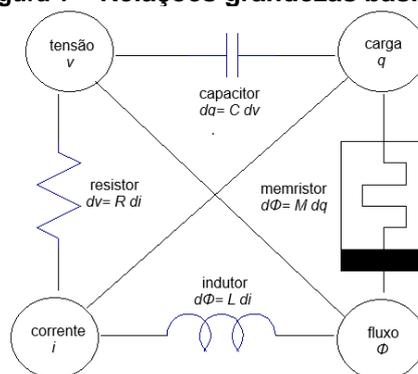
Com base nisso, este trabalho tem o propósito de estudar mais detalhadamente e de forma qualitativa sistemas de EDO's que modelam circuitos elétricos, em especial aqueles que apresentam um memristor como um de seus componentes. O memristor é considerado o quarto elemento fundamental necessário para complementar as relações

<sup>1</sup> Bolsista da Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: martinsb@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 4687157946743889.

<sup>2</sup> Docente no Departamento Acadêmico de Matemática - DAMAT. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: alissonreinol@utfpr.edu.br. ID Lattes: 9116481919041637.

dos três elementos clássicos de um circuito elétrico (resistor, indutor e capacitor), conforme pode ser visto na Figura 1, e tal componente fornece ao circuito elétrico uma resistência elétrica com capacidade de memória. O memristor foi inicialmente proposto de forma teórica, em 1971, por Leon Chua. Para uma boa introdução sobre a história e as propriedades dos memristores, consulte Chua (2015) ou Tetzlaff (2014). Uma vez que a produção em escala industrial de memristores ainda não ocorre, torna-se fundamental realizar estudos teóricos a partir do uso de modelos matemáticos, como o proposto aqui, para que suas propriedades sejam melhor compreendidas.

Figura 1 – Relações grandezas básicas.



Fonte: Autoria própria (2023).

## METODOLOGIA

Para a realização do trabalho proposto, foram utilizados os livros Boyce e DiPrima (2020) e Zill (2016) no estudo da teoria envolvendo o comportamento qualitativo das soluções de sistemas de EDO's. Além disso, no estudo dos componentes do circuito elétrico, seu funcionamento e as leis físicas envolvendo tais conceitos, utilizou-se os livros Alexander e Sadiku (2013) e Boylestad (2012). No estudo qualitativo dos sistemas de EDO's utilizados para modelar circuitos elétricos, foi consultado Anchapuri (2020). Para obtenção dos retratos de fase dos sistemas de EDO's foi utilizado o software matemático Maple (versão 2019) e a representação de circuitos elétricos foi realizada através do software LTSpice XVII.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Inicialmente, considere o sistema de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes

$$x' = Ax, \quad (1)$$

onde  $A$  é uma matriz  $n \times n$  cujos elementos são números reais. Fazendo  $x' = 0$ , a única solução do sistema (1) chamada de solução de equilíbrio, é dada por  $x = 0$ . Deste modo, dizemos que a origem é o único ponto crítico do sistema (1).

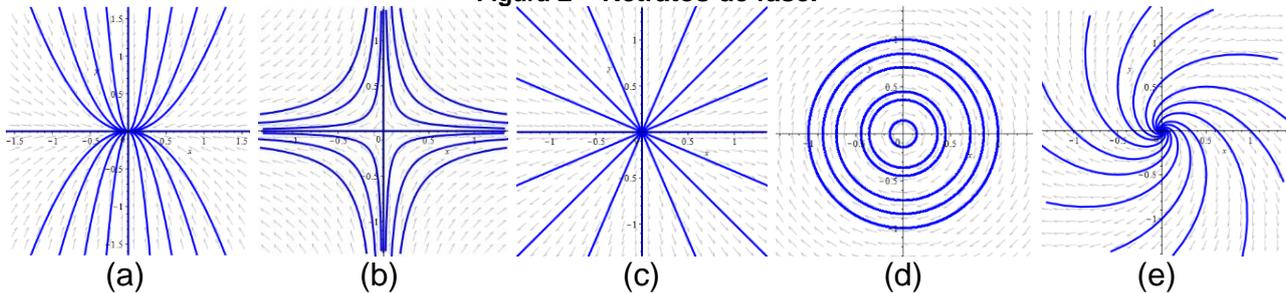
Neste trabalho, considerou-se  $n = 2$ . Deste modo, foi possível estudar o plano  $xy$  composto por amostras significativas de trajetórias que representam soluções dos sistemas de EDO's, chamado de **plano de fase** ou **retrato de fase**. A partir da natureza dos autovalores da matriz  $A$ , obtemos diferentes comportamentos para o ponto crítico localizado na origem e diferentes configurações de retratos de fase, de acordo com o Quadro 1.

**Quadro 1 – Classificação dos autovalores**

| <b>Autovalores</b>  | <b>Classificação</b>             | <b>Retrato de fase</b> |
|---|----------------------------------|------------------------|
| $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$                                   | Nó atrator                       | Figura 2.a)            |
| $0 < \lambda_1 < \lambda_2$                                   | Nó repulsor                      | -                      |
| $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$                                   | Ponto de sela                    | Figura 2.b)            |
| $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$                                   | Nó próprio ou impróprio atrator  | -                      |
| $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$                                   | Nó próprio ou impróprio repulsor | Figura 2.c)            |
| $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$<br><i>j</i> : unidade imaginária | Centro                           | Figura 2.d)            |
| $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \alpha < 0$               | Foco atrator                     | -                      |
| $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta, \alpha > 0$               | Foco repulsor                    | Figura 2.e)            |

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

**Figura 2 – Retratos de fase.**



Fonte: Autoria própria através do software Maple (2023).

Para descrever o comportamento de fenômenos mais complexos, muitas vezes, faz-se necessário o uso de sistemas de equações não-lineares da seguinte forma

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

onde *f* e *g* são funções contínuas nas variáveis *x* e *y*.

O primeiro passo para estudar o comportamento das soluções do sistema (2) é encontrar seus **pontos críticos**, que são aqueles obtidos fazendo-se *x'* e *y'* iguais a zero. Após encontrar os pontos críticos, deve-se analisar o comportamento das soluções próximas destes pontos. Para tal, utiliza-se o **Teorema de Hartman-Grobman**. Este teorema estabelece que, próximo a um ponto crítico *x*<sub>0</sub>, o comportamento do sistema não-linear é determinado pelo comportamento do sistema linearizado, considerando a matriz *A* como sendo a matriz jacobiana avaliada em *x*<sub>0</sub>, ou seja,



$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Deste modo, o comportamento das soluções próximas aos pontos críticos do sistema não-linear se assemelha ao de um sistema linear de acordo com a natureza dos autovalores da matriz da Eq. (3), conforme o Quadro 1, exceto no caso em que o ponto crítico do sistema linearizado é um centro (problema do foco-centro).

Em seguida, são apresentados os elementos básicos de um circuito elétrico e as leis físicas necessárias para a sua modelagem matemática. Um circuito elétrico é um trajeto onde componentes elétricos conectados a um condutor possibilitam o fluxo de corrente, causando mudanças de potencial nos elementos. Resistores, capacitores e indutores são componentes fundamentais comuns em circuitos.

Mais especificamente, temos que resistores são dispositivos bipolares que manifestam resistência elétrica ( $R$ ). Já os capacitores acumulam carga entre terminais separados por um material dielétrico, e a capacitância ( $C$ ) mede a capacidade de um capacitor em armazenar cargas ( $q$ ) a uma voltagem específica. Os Indutores, por outro lado, são compostos por uma bobina e um núcleo, exibindo indutância ( $L$ ) devido a um campo magnético que induz uma tensão ( $V_L$ ) quando a corrente ( $i$ ) varia, e essa relação pode ser expressa na forma

$$V_L = L \cdot i'. \quad (4)$$

Os memristores são descritos como uma resistência elétrica com capacidade de memória e considerados o quarto elemento fundamental necessário para complementar as relações dos três elementos clássicos apresentados. Quando se trata de um memristor de corrente controlada, o seu funcionamento é descrito pelas equações

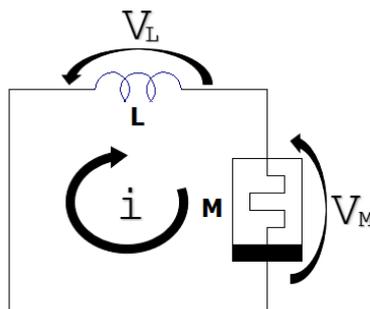
$$V_M = M(x) \cdot i, \quad (5)$$

$$x' = f(i) \cdot g(x), \quad (6)$$

onde as constantes  $V_M$  e  $i$  representam a voltagem e a corrente, respectivamente. Já  $f(i)$ ,  $g(x)$  e  $M(x)$  são funções contínuas escalares, sendo que a função não-linear  $M(x)$  representa a memristância do memristor.

Agora, considere o circuito elétrico com um memristor e um indutor, conforme mostra a Figura 3.

**Figura 3 -Circuito com memristor(M) e indutor(L).**



Fonte: Autoria própria através do software LTSpice (2023).



A partir das Eqs. (4) e (5) e utilizando-se a segunda lei de Kirchhoff, que diz que a soma de todas as tensões em um caminho fechado é zero, obtém-se a equação

$$L \cdot i' + M(x) \cdot i = 0. \tag{7}$$

Deste modo, a partir das Eqs. (6) e (7) é obtido o sistema de EDO's

$$\begin{cases} x' = f(i) \cdot g(x) \\ i' = \frac{-M(x) \cdot i}{L} \end{cases} \tag{8}$$

Neste trabalho, para análise matemática do sistema (8), considerou-se  $f(i) = \alpha(i^2 - 1)$ ,  $g(x) = 1$ ,  $M(x) = x + \beta$  e  $L = 1$ , com  $\alpha$  e  $\beta$  constantes, conforme Anchapuri (2020). Assim, substituindo-os no sistema (8), tem-se

$$\begin{cases} x' = \alpha(i^2 - 1) \\ i' = -(x + \beta) i \end{cases} \tag{9}$$

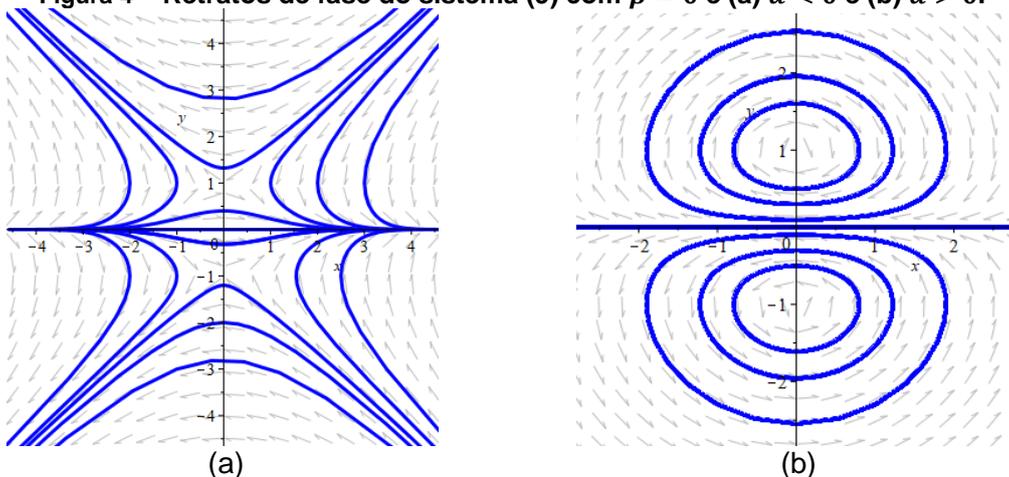
Os pontos críticos do sistema (9) são  $P_{1,2} = (-\beta, \pm 1)$ . A matriz jacobiana do sistema nestes pontos críticos são dadas por

$$A(-\beta, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 2\alpha \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$A(-\beta, -1) = \begin{bmatrix} 0 & -2\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{11}$$

cujos autovalores são  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-2\alpha}$ . Se  $\alpha < 0$ , os pontos críticos  $P_{1,2}$  são pontos de sela e o retrato de fase do sistema (9) é dado pela Figura 4 (a). Se  $\alpha > 0$ , os pontos críticos  $P_{1,2}$  são centros, já que o sistema (9) é hamiltoniano, e o retrato de fase do sistema (9) é dado pela Figura 4 (b). Para mais detalhes sobre sistemas hamiltonianos, consulte Anchapuri (2020). Observe que, no caso  $\alpha > 0$ , a corrente apresenta comportamento cíclico quando  $i \neq 0$ .

**Figura 4 – Retratos de fase do sistema (9) com  $\beta = 0$  e (a)  $\alpha < 0$  e (b)  $\alpha > 0$ .**



Fonte: Autoria própria através do software Maple (2023).



## CONCLUSÃO

Este trabalho possibilitou o estudo qualitativo das soluções de sistemas de EDO's utilizados para modelar matematicamente circuitos elétricos com o “quarto elemento fundamental” da eletrônica, denominado memristor, como um de seus componentes. Deste modo, conseguiu-se compreender melhor o funcionamento do memristor e, obter os retratos de fase dos sistemas de equações diferenciais usados para modelar tais circuitos, possibilitando o estudo do comportamento das suas soluções.

## Agradecimentos

Agradeço ao meu professor e orientador, Alisson de Carvalho Reinol, por contribuir com meu aprendizado ao longo do caminho. Também expresso minha gratidão à Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR pela oportunidade e suporte financeiro.

## Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

## REFERÊNCIAS

ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N O. **Fundamentos de circuitos elétricos com aplicações**. Grupo A, 2013.

ANCHAPURI, Elida C. **Oscilações lineares e não-lineares em circuitos elétricos e estudo de circuitos memristores hamiltonianos**. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista (Unesp). Presidente Prudente, p. 97, 2020.

BOYCE, William E, DIPRIMA, Richard. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. (11th edição). Grupo GEN, 2020.

BOYLESTAD, Robert L. **Introdução à análise de circuitos**. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

CHUA, Leon O. **Memristor: The missing circuit element**. IEEE Transactions on Circuit Theory, v. 18, p. 507-519, 1971.

CHUA, Leon O. **Everything you wish to know about memristors but are afraid to ask**. Radioengineering, v. 24, p. 319-368, 2015.

TETZLAFF, R. **Memristors and memristive systems**. Nova Iorque: Springer Science + Business, 2014.

ZILL, Dennis G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. (10th edição). São Paulo: Cengage Learning, 2016.