



# Modelagem e simulação de suspensão semiativa utilizando as abordagens de norma H2 e representação politópicas

## Modeling and Simulation of semi-active suspension based on H2 norm approaches and polytopic representation

Vitor Siqueira Proença dos Santos<sup>1</sup>, Cristiano Marcos Agulhar<sup>2</sup>

### RESUMO

Uma suspensão semiativa representa um sistema revolucionário que objetiva a melhoria da dinâmica de um veículo. Ao contrário das suspensões passivas tradicionais, que permanecem estáticas e inflexíveis, as suspensões semiativas se adaptam em tempo real, respondendo às mudanças nas condições de condução e no ambiente circundante. Essa capacidade dinâmica resulta em uma série de vantagens notáveis, que abrangem desde o aumento do conforto e da estabilidade até a melhoria da segurança e da versatilidade do veículo, oferecendo uma experiência de direção suave e estável, independentemente do terreno ou das condições climáticas. No entanto, a complexidade das suspensões semiativas também traz desafios. Os amortecedores controláveis podem exibir um comportamento não linear e incertezas que evoluem ao longo do tempo, o que requer soluções avançadas. Para enfrentar esse desafio, o presente projeto propõe a aplicação de técnicas de controle robusto. Essas técnicas visam projetar um controlador capaz de atender aos objetivos estabelecidos, otimizando o desempenho da suspensão semiativa enquanto minimiza suas desvantagens potenciais. Ao analisar cuidadosamente as vantagens e desvantagens dessa abordagem, esperamos aprimorar significativamente a experiência de direção e a segurança dos veículos equipados com suspensões semiativas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Controle robusto; LMI; LQR; Norma H2; suspensão semi-ativa.

### ABSTRACT

A semi-active suspension represents a revolutionary system that revolutionizes the dynamics of a vehicle. Unlike traditional passive suspensions, which remain static and inflexible, semi-active suspensions adapt in real time, responding to changes in driving conditions and the surrounding environment. This dynamic capability results in a number of notable advantages, ranging from increased comfort and stability to improved vehicle safety and versatility, offering a smooth and stable driving experience regardless of the terrain or weather conditions. However, the complexity of semi-active suspensions also brings challenges. Controllable dampers can exhibit non-linear behavior and uncertainties that evolve over time, which requires advanced solutions. To meet this challenge, this project proposes the application of robust control techniques. These techniques aim to design a controller capable of meeting the established objectives, optimizing the performance of the semi-active suspension while minimizing its potential disadvantages. By carefully analyzing the advantages and disadvantages of this approach, we hope to significantly improve the driving experience and safety of vehicles equipped with semi-active suspensions.

**KEYWORDS:** Robust control; LMI; LQR; H2 norm; Semi-active suspension.

<sup>1</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. E-mail: vitors.2000@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 1049146849919809.

<sup>2</sup> Docente no Curso de Engenharia de Controle e Automação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. E-mail: agulhari@utfpr.edu.br. ID Lattes: 4935395556663775.



## INTRODUÇÃO

Há uma busca por melhorar o conforto e a capacidade de controle de automóveis. Algumas indústrias automotivas utilizam suspensões ativas, mas também existem sistemas passivos, semiativos ou totalmente ativos (ESMAILZADEH E.; BATENI, 1992).

## REFERENCIAL TEÓRICO

### NORMA $H_2$

A norma  $H_2$  visa trabalhar o desempenho do sistema de maneira similar ao modelo Linear Quadratic Regulator (LQR), onde pode-se dar prioridade à minimização da energia dos estados ou ponderar para a minimização da energia de controle (DE; GEROMEL; BERNUSSOU, 2002). Considere o sistema da Equação (1). A técnica de controle LQR consiste em determinar o ganho de realimentação de estados tal que o sinal de controle  $u(t) = Kx(t)$  minimiza a função objetivo que é mostrada pela Equação (2).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$J_r = \int_0^{\infty} (x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t)) dt \quad (2)$$

As matrizes  $Q$  e  $R$  devem ser escolhidas tais que,  $Q = Q^T \geq 0$   $R = R^T \geq 0$  (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005). Quanto maior o valor de  $Q$  em relação a  $R$ , mais rápido o sistema tende a entrar em regime e se estabilizar, e quanto maior o valor de  $R$  em relação a  $Q$  menor a energia de controle para chegar ao regime. A norma  $H_2$  é uma medida de desempenho utilizada em sistemas estritamente próprios. Devemos considerar o seguinte sistema, conforme mostrado nas Equações (3) e (4).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \quad (3)$$

$$z(t) = C_z x(t) + D_{zu} u(t) \quad (4)$$

As variáveis  $w(t)$  e  $z(t)$  são, respectivamente, entradas e saídas artificiais cuja função de transferência  $\|H(s)\|_2$  é definida pela Equação (5). De acordo com Equação (5), a norma  $H_2$  de um sistema corresponde à energia de sua resposta ao impulso. Uma forma alternativa de calcular essa norma consiste em resolver o problema de otimização apresentado nas Equações (7) e (8).

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(H(jw) * H(jw)) dw = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}(h(t) * h(t)) dt \quad (5)$$

$$\min_{X=X'>0} \text{Tr}(X) \quad (6)$$



$$\begin{bmatrix} -X & C_z G + D_z Z \\ \star & P_c - G - G' \end{bmatrix} \leq 0 \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} AG + BZ + G' A' + Z' B' & P_c - G' + \xi(AG + BZ) & B_w V \\ \star & \xi(-G - G') & 0 \\ \star & \star & I - V - V' \end{bmatrix} \leq 0 \quad (8)$$

Se existirem matrizes  $X, G, Z$  e  $V$ , de dimensões apropriadas, e uma escala  $\xi$ , que resolve o problema de otimização apresentado nas Equações (6) e (8), então o ganho de realimentação que minimiza a norma  $H_2$  é dado por  $K = ZG^{-1}$ . As matrizes  $C_z$  e  $D_z$  devem ser determinadas pelo projetista e sendo relacionadas às matrizes  $Q$  e  $R$ , respectivamente, do controle LQR. Mais especificamente, pode-se dizer que  $Q = C_z' C_z$  e  $R = D_z' D_z$ .

## REPRESENTAÇÃO POLITÓPICAS

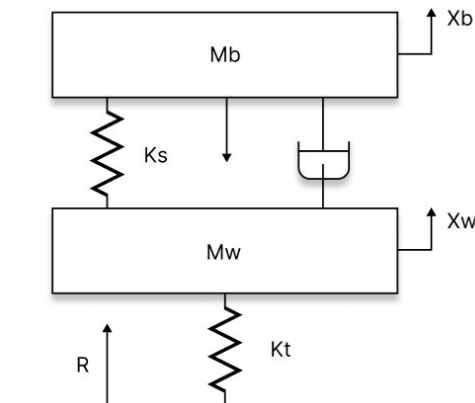
Um sistema pode apresentar parâmetros incertos fixos ou variantes no tempo, com taxas de variação conhecidas ou então com taxas de variação arbitrárias. Existem diversas formas de se representar incertezas paramétricas de um sistema (OLIVEIRA, 2018). A representação politópica é utilizada neste trabalho. O que possibilita a busca por condições de estabilidade convexas mais complexas e em geral mais retrativas (GAHINET; APKARIAN; CHILALI, 1994).

## MÉTODOS

### MODELAGEM

A modelagem foi realizada utilizando uma representação por equações de estados. A Figura 1 ilustra o sistema analisado.

**Figura 1 – Sistema de suspensão.**



Fonte: Adaptado de (MILLER, 1988).

Onde  $k_s$  é a Rigidez da mola,  $b_s$  coeficiente de amortecimento,  $m_b$  massa do corpo suspenso  $m_w$  massa da roda e  $k_t$  rigidez do pneu. Foram feitas as seguintes considerações: que  $x_b$  e



$x_w$  representam os deslocamentos verticais da massa da suspensão e da roda, respectivamente. Estabeleceram-se as seguintes variáveis de estado. Onde  $\dot{x}_1$  é velocidade vertical da massa suspensa,  $\dot{x}_2$  aceleração vertical da massa suspensa,  $\dot{x}_3$  velocidade vertical da roda e  $\dot{x}_4$  aceleração vertical da roda. Com base na representação do sistema proposta por (MILLER, 1988), foram realizados os cálculos e obtivemos a seguinte equação de estado, conforme mostrado nas Equações (9) e (10).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_b} & -\frac{b_s}{m_b} & \frac{k_s}{m_b} & \frac{b_s}{m_b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_w} & \frac{b_s}{m_w} & -\frac{k_s+k_t}{m_w} & -\frac{b_s}{m_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_w} \end{bmatrix} R \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (10)$$

O sinal de entrada  $R$  do sistema, conforme apresentado na Equação (9), representa a informação referente à condição da pista, como ilustrado na Figura 1.

## CONTROLE

O objetivo é controlar a velocidade de deslocamento da massa suspensa em um veículo, mantendo-a próxima de zero e minimizando a aceleração para reduzir o desconforto dos passageiros. Isso é alcançado por meio da variação do coeficiente de amortecimento dos amortecedores, que podem ser ajustados dentro de limites específicos. O coeficiente de amortecimento  $b_s$  é definido como a soma de um valor constante  $b_0$  e uma variação controlável delta, conforme a Equação (11). O modelo de controle do sistema é apresentado na Equação (12).

$$b_s = b_0 + \delta_b \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_b} & -\frac{b_s}{m_b} & \frac{k_s}{m_b} & \frac{b_s}{m_b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_w} & \frac{b_s}{m_w} & -\frac{k_s+k_t}{m_w} & -\frac{b_s}{m_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-x_2+x_4}{m_b} \\ 0 \\ \frac{x_2-x_4}{m_w} \end{bmatrix} \delta_b + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_w} \end{bmatrix} R \quad (12)$$

## CONTROLE MELHORANDO O DESEMPENHO

O controle levará em consideração a variação dos estados  $x_2$  e  $x_4$ , conforme definido na Equação (12), que é tratada como um parâmetro variante ao longo do tempo. Contudo, para evitar um problema de falta de controlabilidade em que a diferença entre os estados se torna zero, o controle será projetado para atuar apenas quando a diferença  $x_2 - x_4$  estiver no intervalo de  $[1, 10]$ . Isso será representado por meio de uma abordagem politópica, resultando em um novo modelo do sistema descrito na Equação (13). As matrizes  $B_1$  e  $B_2$  definem os valores mínimo e máximo da diferença



entre os estados  $x_2$  e  $x_4$ , que foram especificados como 1 e 10 pelo projetista, respectivamente. Portanto, o sistema é configurado conforme apresentado na Equação (14).

$$\dot{X} = Ax + (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)\delta_b + BR \quad (13)$$

$$\dot{X} = Ax + \left( \alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ m_b \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \\ 10 \\ m_w \end{bmatrix} \right) \delta_b + BR \quad (14)$$

Para o desenvolvimento do programa no *MATLAB*, serão utilizadas 4 *LMIs*, baseadas nas condições (7) e (8). A *LMI1* será utilizada para garantir que a matriz  $P_c$  seja positiva definida, conforme mostrado na Equação (15).

$$P_c \geq 0 \quad (15)$$

As *LMIs* 2 e 3 são utilizadas para representar a norma  $H_2$  com as representações politópicas. As Equações (16) mostram a LMI 2. A LMI 3 é a mesma matriz mostrada na Equações (16) só que no lugar de  $B_1$  é  $B_2$ .

$$\begin{bmatrix} AG + B_1 Z + G' A' + Z' B_1' & P_c - G' + \xi(AG + B_1 Z) & B_w V \\ \star & \xi(-G - G') & 0 \\ \star & \star & I - V - V' \end{bmatrix} \leq 0 \quad (16)$$

A *LMI* 4 também se refere à norma  $H_2$  e ela é apresentada na Equação 7. Nessa *LMI*, as matrizes  $C_z$  e  $D_z$  devem ser definidas pelo projetista. Os valores escolhidos para essas matrizes são apresentados nas Eq. (17) e Eq. (18).

$$C_z = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$D_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

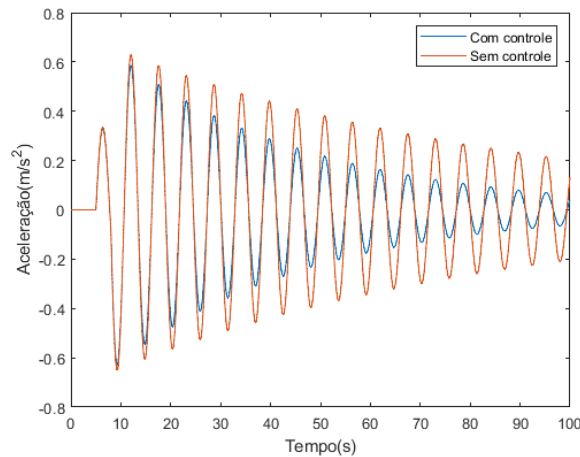
Com base nessas condições, pretende-se projetar um controlador  $K$  e aplicar esses ganhos no sistema para avaliar o comportamento do mesmo em diferentes tipos de obstáculos.

## RESULTADOS

Com os ganhos  $K$  encontrados foi executado uma simulação para analisar o comportamento da aceleração da suspensão que é apresentada pelo  $\dot{x}_2$  na Eq. (12). Sendo assim a Figura 2 mostra o estado com e sem controle. Ao analisar a Figura 2, é possível notar que houve uma redução na aceleração vertical do carro quando foi aplicado um controle. Contudo, é importante ressaltar que este estudo não abordou a análise do consumo de energia.



Figura 2 – Comparação da aceleração vertical da massa suspensa.



Fonte: Autoria Propriá

## Agradecimentos

Desejo expressar minha gratidão ao meu orientador por me aceitar como seu orientando e por me orientar ao longo desta jornada acadêmica. Além disso, sou grato aos meus pais por cuidarem da minha parte financeira, o que permitiu que eu me concentrasse mais na minha área de estudo.

## Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

## REFERÊNCIAS

- DE, Luis; GEROMEL, José Carlos; BERNUSSOU, Jacques. Extended H2 and H norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. **International Journal of Control**, v. 75, n. 9, p. 666–679, jan. 2002. DOI: [10.1080/00207170210138068](https://doi.org/10.1080/00207170210138068).
- ESMAILZADEH E.; BATENI, H. Optimal Active Vehicle Suspensions with Full State Feedback Control. **Society of Automotive Engineers**, v. 101, n. 1, p. 781–795, 1992.
- GAHINET, Pascal; APKARIAN, Pierre; CHILALI, Mahmoud. A New Parameter-Dependent Lyapunov Functions for Real Parametric Uncertainty. In: PROCEEDINGS of the 33rd Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista: [s.n.], dez. 1994. P. 2026–2031.
- MILLER, L. R. Tuning Passive, Semiactive, and Fully Active Suspension Systems. In: PROCEEDINGS of the 27th IEEE Conference on Decision and Control. [S.l.: s.n.], 1988. v. 3, p. 2047–2053.
- OLIVEIRA, Guilherme Aleksanders de. Projeto de controladores PID robustos para sistemas politópicos sujeitos à atraso incerto: uma abordagem LMI, 2018.
- SKOGESTAD, Sigurd; POSTLETHWAITE, Ian. **Multivariable Feedback Control: Analysis and Design**. 2nd. Chichester: John Wiley & Sons, 2005.