



# Controle LQR para conversores CC-CC: uma abordagem LMI

## LQR Control for DC-DC Converters: an LMI approach

Matheus Labegalini Stencil<sup>1</sup>,  
Rodrigo da Ponte Caun, Willian Ricardo Bispo Murbak Nunes<sup>2</sup>

### RESUMO

O presente trabalho objetiva o desenvolvimento uma formulação LMI (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) de controladores baseados no problema do regulador linear quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* — LQR) e na realimentação estática da saída (do inglês, *Static Output Feedback* — SOF). Para tanto, as restrições são fundamentadas no segundo método de Lyapunov, no conceito da  $\alpha$ -estabilidade e em um método composto por dois estágios, considerando uma estratégia de controle proporcional com pré-filtragem. Nesse contexto, aplicações de regulação de tensão baseadas em conversores eletrônicos de potência dos tipos buck e boost serão consideradas a fim de se avaliar o comportamento da tensão de saída sob realimentação de estados e da saída, em termos do posicionamento dos autovalores dos sistemas controlados e dos respectivos desempenhos dinâmicos.

**PALAVRAS-CHAVE:** LMIs; LQR; SOF.

### ABSTRACT

The present work aims at developing an LMI formulation of controllers based on the linear quadratic regulator problem (LQR) and static output feedback (SOF). For this purpose, the constraints are supported by Lyapunov's second method, the concept of  $\alpha$ -stability and a two-stage method, considering a proportional control strategy with pre-filtering. In this scenario, voltage regulation applications based on buck and boost converters will be taken into account in order to assess the output voltage behaviour by state and output feedback, in terms of the positioning of the eigenvalues of the controlled systems and their respective dynamic performances.

**KEYWORDS:** LMIs; LQR; SOF.

### INTRODUÇÃO

Em contraste com a teoria de controle clássico, a teoria de controle moderno possibilita, dentre outros aspectos, a representação de sistemas complexos — lineares ou não lineares, com múltiplas entradas e saídas, variantes e invariantes no tempo e com condições iniciais não nulas — e a síntese de sistemas de controle que possibilitam a obtenção de um desempenho ótimo (OGATA, 2011; FADALI; VISIOLI, 2013).

Nesse contexto, as técnicas de projeto de controladores podem ser fundamentadas em diferentes tipos de realimentação e de formulações. No tocante ao primeiro aspecto, a realimentação de estados se destaca como uma estratégia mais consolidada na literatura. Para a maior parte dos

<sup>1</sup> Aluno voluntário. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: mstencil@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 1723029421630802.

<sup>2</sup> Docentes no Curso de Engenharia Elétrica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: rodrigocaun@utfpr.edu.br, willianr@utfpr.edu.br. ID Lattes: 3945379729001649, 4889618956920630.



sistemas físicos, contudo, a aferição de todos os estados é inviável pragmática e/ou economicamente. Como uma alternativa, tem-se a possibilidade de se estimar os estados inacessíveis a partir das saídas do sistema por meio de observadores de estados (DORF; BISHOP, 2009) ou, ainda, empregar controladores baseados na realimentação das próprias saídas — uma alternativa que dispõe de maior simplicidade e facilidade de implementação, quando comparada à primeira (SERENI, 2019).

No que tange as formulações, há vertentes baseadas em métodos analíticos e de otimização. No primeiro caso, pode-se destacar a alocação de autovalores, que parte da especificação de índices de desempenho e é fundamentada na realimentação de estados (OGATA, 2011). No segundo, são notáveis os problemas formulados a partir dos métodos desenvolvidos pelo matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov e expressos na forma de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *linear matrix inequalities* — LMIs), os quais são passíveis de resolução por meio de algoritmos computacionais de otimização convexa e possibilitam, portanto, a obtenção de soluções ótimas, dado um conjunto de restrições — como, por exemplo, a limitação da ação de controle —, e, assim como no caso da alocação de autovalores, o atendimento de critérios de desempenho dinâmico (FADALI; VISIOLI, 2013; TROFINO et al., 2015; BOYD, 1994).

Dentre as formulações de controle ótimo baseadas em LMIs, pode-se relevar o problema do regulador linear quadrático (do inglês, *linear quadratic regulator* — LQR). Através deste, faz-se possível ponderar as funções de energia dos estados e das ações de controle por meio de escalares reais, escolhidos pelo projetista, e, dessa forma, obter uma lei de controle sistematicamente. Para tanto, qualquer uma das estratégias de realimentação de sinais pode ser empregada (TROFINO et al., 2015).

À vista das informações explicitadas, a contribuição do presente trabalho envolve estudos preliminares da síntese de controladores lineares quadráticos baseados em LMIs e da realimentação estática da saída, considerando aplicações a conversores estáticos CC-CC do domínio da eletrônica de potência (dos tipos *buck* e *boost*), avaliando a possibilidade de dispensar o sensoriamento de corrente, na expectativa de contribuir com a redução dos custos e do volume atrelados ao sistema controlado.

## METODOLOGIA

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema do regulador linear quadrático objetiva a determinação de um vetor de ganhos de realimentação de estados para o sistema descrito segundo a equação diferencial (1) que minimize a função de custo garantido (2), de forma que se possa equilibrar a *performance* dinâmica e a intensidade do sinal de controle.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & u(t) = Kx(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

tal que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  e  $y(t) \in \mathbb{R}^l$  representam os sinais de estados, controle e saída;  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$  denotam as matrizes de estados, entrada e saída;  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  consiste no ganho de realimentação de estados.

$$\mathcal{J} = \min \int_0^{\infty} z^T z dt, \quad z^T z = x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \quad (2)$$

sendo  $z^T z$  o índice de desempenho quadrático do regulador e o par  $\{Q, R\}$  as matrizes de ponderação simétricas definidas positivas, que possibilita ao projetista balancear as energias dos estados à ação de controle, respectivamente.

Logo, uma formulação LMI do problema do LQR pode ser descrita por (PONTE CAUN et al., 2018):

$$\begin{aligned} & \min_{\mu, W, Z} \mu \\ \text{Sujeito a} & \begin{bmatrix} \mu & * \\ x(0) & W \end{bmatrix} > 0 \\ & \begin{bmatrix} \mathcal{G} & * & * \\ W & -Q^{-1} & * \\ Z & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (3)$$

com  $\mathcal{G} = AW + WA^T + BZ + Z^T B^T + 2\alpha W$ ,  $K = ZW^{-1}$  e  $\alpha$  a taxa de decaimento.

Por outro lado, um ganho de realimentação da saída,  $L = H^{-1}J$ , pode ser obtido a partir de um ganho de realimentação de estados,  $K$ , e da LMI (4); trata-se de um procedimento composto por dois estágios (SERENI, 2019). Nesta proposta,  $K$  é obtido através do problema de minimização descrito por (4).

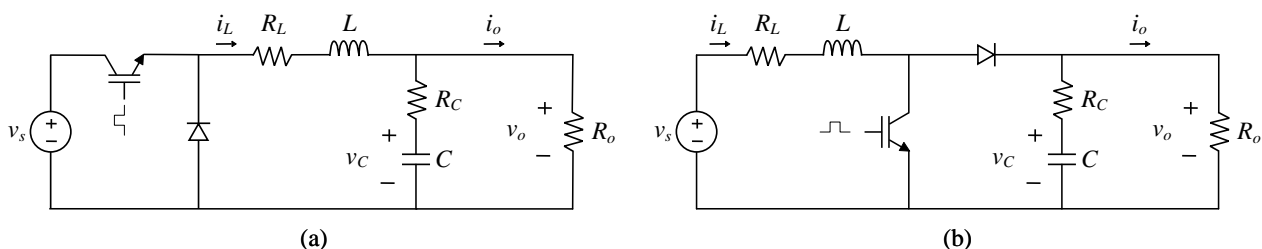
$$\begin{bmatrix} A^T F^T + FA + K^T B^T F^T + FBK + 2\alpha P & * & * \\ P - F^T + GA + GBK & -G - G^T & * \\ B^T F^T + JC - HK & B^T G^T & -H - H^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

tal que  $P = P^T > 0$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $J$  denotam variáveis matriciais de dimensões apropriadas.

### CONVERSORES ESTÁTICOS CC-CC

A Figura 1 apresenta os conversores CC-CC em estudo.

**Figura 1 – Esquemáticos dos conversores buck (a) e boost (b)**



Fonte: Adaptado de (OLALLA et al., 2009).

Com base nas técnicas de análise de circuitos e na metodologia apresentada em (LEYVA et al., 2012), são obtidas as representações por espaço de estados cujos parâmetros constam no Quadro 1.

$$buck \rightarrow \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{v_s}{L} \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \quad (5)$$

$$boost \rightarrow \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{D'}{L} \\ \frac{D'}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{D' R v_s}{(R_L + R D'^2) L} \\ \frac{-v_s}{(R_L + R D'^2) C} \end{bmatrix} d(t) \quad (6)$$

com  $x(t) = [i_L(t) \ v_C(t)]^T$ . A variável  $d(t)$  representa a razão cíclica da modulação por largura de pulso e, no caso do conversor *boost*, tem-se que  $D' \cong v_s/v_o$ .

**Quadro 1 – Parâmetros dos conversores de energia.**

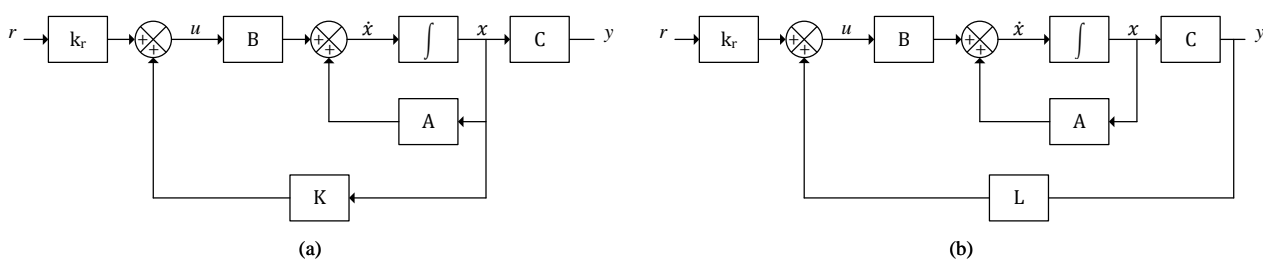
<i>buck</i>			<i>boost</i>		
$v_s = 24 \text{ V}$	$v_o = 12 \text{ V}$	$R = 25 \ \Omega$	$v_s = 12 \text{ V}$	$v_o = 24 \text{ V}$	$R = 25 \ \Omega$
$L = 200 \ \mu\text{H}$	$R_L = 0,18 \ \Omega$	$C = 200 \ \mu\text{F}$	$L = 200 \ \mu\text{H}$	$R_L = 0,18 \ \Omega$	$C = 200 \ \mu\text{F}$

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para o desenvolvimento das simulações, utilizou-se a *Robust Control Toolbox* do software MATLAB. As estratégias de controle são ilustradas segundo os diagramas de blocos da Figura 2, nas quais um ganho de pré-filtragem foi empregado com o intuito de se atingir o erro nulo em regime permanente. Isso se justifica pelo fato de que, em razão de limitações inerentes aos modelos matemáticos, a inclusão de integradores aos sistemas controlados se torna inviável no caso da realimentação estática da saída, o que representa uma desvantagem em relação à técnica de realimentação de estados.

**Figura 2 – Diagramas de blocos das realimentações de estados (a) e da saída (b)**



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

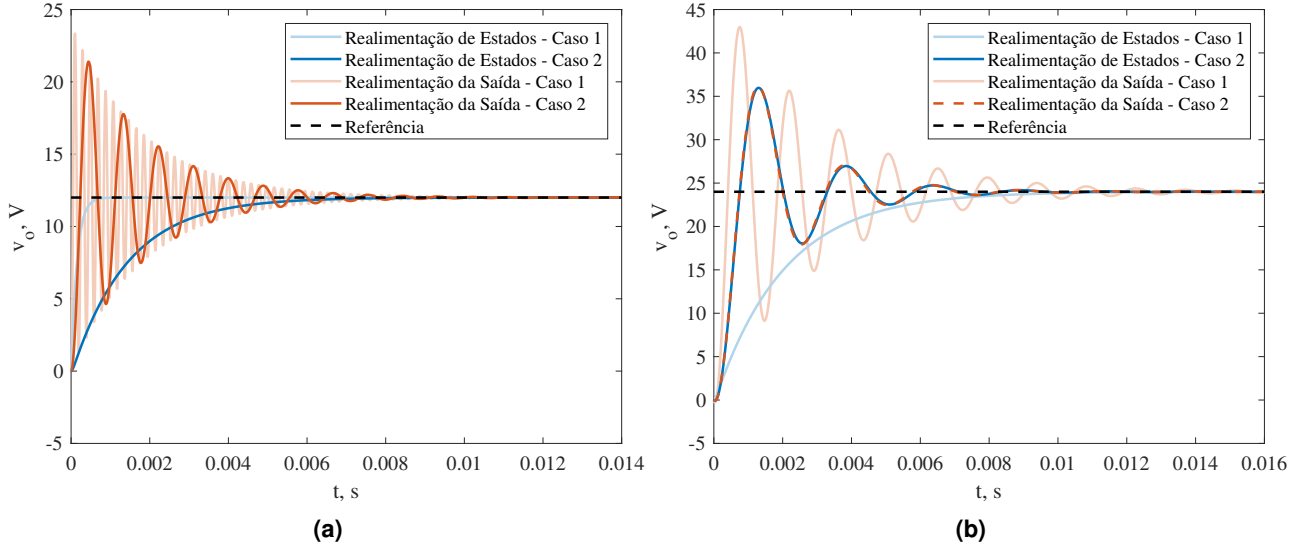
O projeto de controle considerou os seguintes especificações:

- Caso 1:  $Q = \text{diag}(1; 1)$  e  $R = 1$ , no caso do *buck*;  $Q = \text{diag}(1; 0,01)$  e  $R = 1$ , no caso do *boost*, além da taxa de decaimento  $\alpha = 1$ .
- Caso 2:  $Q = \text{diag}(100; 1)$ ,  $R = 60$ ,  $\alpha = 0$ , no caso do *buck*;  $Q = \text{diag}(0,01; 0,001)$ ,  $R = 100000$ ,  $\alpha = 100$ , no caso do *boost*.



Logo, pôde-se obter os resultados apresentados na Figura 3.

**Figura 3 – Sinais da tensão de saída nos conversores *buck* (a) e *boost* (b)**



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

**Quadro 2 – Autovalores do sistema controlado - conversor *buck***

Simulação 1		Simulação 2	
Realimentação de Estados	Realimentação da Saída	Realimentação de Estados	Realimentação da Saída
$-1,32 \times 10^5$	$(-0,06 + j3,22) \times 10^4$	$-2,79 \times 10^4$	$(-0,06 + j0,71) \times 10^4$
$-0,07 \times 10^5$	$(-0,06 - j3,22) \times 10^4$	$-0,07 \times 10^4$	$(-0,06 - j0,71) \times 10^4$

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

**Quadro 3 – Autovalores do sistema controlado - conversor *boost***

Simulação 1		Simulação 2	
Realimentação de Estados	Realimentação da Saída	Realimentação de Estados	Realimentação da Saída
$-1,49 \times 10^5$	$(-0,34 + j4,37) \times 10^3$	$(-0,55 + j2,48) \times 10^3$	$(-0,55 + j2,50) \times 10^3$
$-0,01 \times 10^5$	$(-0,34 - j4,37) \times 10^3$	$(-0,55 - j2,48) \times 10^3$	$(-0,55 - j2,50) \times 10^3$

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

## CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou uma metodologia para o projeto de controladores baseados na realimentação estática da saída, com aplicação a conversores do domínio da eletrônica de potência. Em uma análise comparativa, a realimentação de estados do primeiro estágio possibilitou a obtenção de respostas transitórias de primeira ordem, enquanto a realimentação da saída culminou em respostas características de sistemas de segunda ordem com elevado sobressinal. Ao se considerar a formulação em questão, portanto, a realimentação da saída pode implicar em efeitos nocivos em aplicações de regulação de tensão, visto que dispositivos eletrônicos são altamente sensíveis a variações da grandeza em questão. Logo, puderam ser evidenciadas limitações inerentes à proposta por realimentação da saída da tensão dos conversores. Por essa razão, investigações estão sendo



realizadas com o intuito de se aprimorar os resultados provenientes da estratégia de realimentação de sinais empregada.

### Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Universidade Tecnológica Federal do Paraná/Brasil.

### Disponibilidade de Código

Os autores optaram por não disponibilizar os códigos devido a sua simplicidade de replicação.

### Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

### REFERÊNCIAS

- BOYD, Stephen P. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia, EUA: Society for Industrial e Applied Mathematics, 1994. (SIAM studies in applied mathematics, vol. 15). ISBN 978-0-89871-334-3.
- DORF, R.C.; BISHOP, R.H. **Sistemas de controle modernos**. Rio de Janeiro, Brasil: LTC, 2009. ISBN 9788521635147.
- FADALI, M. Sami; VISIOLI, Antonio. **Digital Control Engineering: Analysis and Design**. 2a. Amsterdã, Países Baixos: Elsevier Science, 2013.
- LEYVA, R. et al. Passivity-based control for large-signal stability of high-order switching converters. **Asian Journal of Control**, v. 14, n. 2, p. 335–347, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1002/asjc.379>.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5a. São Paulo, Brasil: Pearson Prentice Hall, 2011. ISBN 9788576058106.
- OLALLA, C. et al. Robust LQR Control for PWM Converters: An LMI Approach. en. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 56, n. 7, p. 2548–2558, 2009. ISSN 0278-0046. DOI: [10.1109/TIE.2009.2017556](https://doi.org/10.1109/TIE.2009.2017556). Acesso em: 28 mai. 2023.
- PONTE CAUN, Rodrigo da et al. LQR-LMI control applied to convex-bounded domains. en. Edição: Kun Chen. **Cogent Engineering**, v. 5, n. 1, p. 1457206, 2018. ISSN 2331-1916. DOI: [10.1080/23311916.2018.1457206](https://doi.org/10.1080/23311916.2018.1457206). Acesso em: 28 mai. 2023.
- SERENI, Bruno. **Static Output Feedback Control for LPV and uncertain LTI systems**. 2019. Diss. (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista (UNESP), Ilha Solteira, Brasil.
- TROFINO, Alexandre et al. **Controle robusto**. pt. Florianópolis, Brasil: Universidade Federal de Santa Catarina, 2015. Disponível em: [🔗](#).