



## Análise computacional linear estática de vigas sobre fundação elástica considerando o modelo de solo de Pasternak por meio do MEF

### Static Linear Computational Analysis of Beams on Elastic Foundation Considering the Pasternak Soil Model through the FEM

Eduardo de Pizzol Pavan<sup>1</sup>, Ana Laura Ravalho Pascotto<sup>2</sup>, Luiz Antonio Farani de Souza<sup>3</sup>

#### RESUMO

Uma das áreas de grande relevância na análise estrutural é a avaliação do comportamento estático de elementos estruturais, os quais que estão apoiados em outros meios que oferecem restrições de movimento, como o solo. Este trabalho trata da análise linear estática de vigas sobre fundação elástica, em que o solo é simulado pelos modelos de Winkler, de Pasternak e de molas discretas. A estratégia de modelagem numérica utilizada baseia-se na aplicação do Método dos Elementos Finitos. Um código computacional é desenvolvido com o programa livre Scilab. Dois problemas de vigas com extremidades livres encontrados na literatura são estudados. A interação entre o solo e a estrutura é considerada com contato bilateral. Os resultados numéricos evidenciam a influência na rigidez do sistema estrutural ao se considerar o contato da viga com o solo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Elementos Finitos; Interação solo-estrutura; Pasternak.

#### ABSTRACT

One of the areas of great relevance in structural analysis is the evaluation of the static behavior of structural elements, which are supported by other medium that offer movement restrictions, such as the soil. This work deals with the static linear analysis of beams on elastic foundations, in which the soil is simulated by the Winkler, Pasternak and discrete spring models. The numerical modeling strategy used is based on the application of the Finite Element Method. A computational code is developed with the Scilab open-source program. Two problems of beams with free ends found in the literature are studied. The interaction between the soil and the structure is bilateral contact. The numerical results highlight the influence on the stiffness of the structural system when considering the contact of the beam with the soil.

**KEYWORDS:** Finite Elements; Soil-structure interaction; Pasternak.

#### INTRODUÇÃO

A interação entre a estrutura e o solo que a suporta é um aspecto crucial na engenharia civil e geotécnica (Worku; Habte, 2022). A escolha de uma metodologia que possibilite a consideração da interação entre o solo e a estrutura na análise é uma etapa fundamental no processo de solução do problema estrutural (Rosas et al., 2017). Segundo Limkatanyu et al. (2012), diversos desses problemas podem ser formulados e resolvidos usando o conceito de viga sobre fundação elástica. A modelagem precisa dessa interação é essencial para prever o comportamento estrutural sob várias condições de carga.

<sup>1</sup> Voluntário da UTFPR / Trabalho Voluntário. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: eduardopavan@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: <http://lattes.cnpq.br/2346045120679425>.

<sup>2</sup> Bolsista do PIBIC CNPq — CNPQ / Bolsa Iniciação científica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: analaurapascotto@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1376429716912723>.

<sup>3</sup> Docente no Curso de Engenharia Civil. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: lasouza@utfpr.edu.br. ID Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0388431681382591>.



Tradicionalmente, essa interação é representada por um ou dois parâmetros de rigidez, como discutido por Dutta e Roy (2002). O modelo de Pasternak (Pasternak, 1954) é uma extensão do modelo de Winkler, que considera o solo como um conjunto de molas independentes. No modelo de Pasternak há duas constantes para representar o comportamento do solo, sendo uma delas o de cisalhamento, a qual permite alguma interação entre as molas.

Neste estudo, adota-se uma abordagem computacional, a partir do programa livre Scilab (Scilab, 2023), para obter a resposta linear estática de vigas sobre fundação elástica usando os modelos de solo de Winkler, de Pasternak e de molas discretas. A interação entre o solo e a estrutura é considerada com contato bilateral. As estruturas são discretizadas por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), sendo que a formulação é fundamentada na teoria de viga de Euler-Bernoulli.

Dois problemas de vigas com extremidades livres encontrados na literatura são estudados. Uma das vigas está em contato com argila arenosa em que o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da mesma são fornecidos. A escolha desses exemplos se deve à sua relevância na prática da engenharia geotécnica e à complexidade que apresenta em termos de interação solo-estrutura.

## MATERIAIS E MÉTODOS

No modelo de molas discretas, a reação da mola é proporcional ao seu deslocamento no ponto nodal  $i$  do sistema discreto. Assim, pode-se escrever que:

$$r_{yi} = k_{yi}v_i, \quad (1)$$

na qual  $r_{yi}$  é a reação da base,  $v_i$  o deslocamento vertical na direção de  $y$  e  $k_{yi}$  é o parâmetro de rigidez da mola conectada no nó  $i$  da estrutura.

O modelo de Winkler apresenta apenas um parâmetro definindo a propriedade do solo. Esse modelo representa a região de contato por meio de molas estreitamente espaçadas e independentes entre si. Essa teoria conduz a mesma resposta da mola tanto na tração quanto na compressão (Younesian et al., 2019). A matriz de rigidez da base  $\mathbf{K}_{b1}$  para o elemento finito é dada por (Teodoru; Muşat, 2008):

$$\mathbf{K}_{b1} = \frac{k_{s1}L}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & 156 & -22L & \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

na qual  $k_{s1}$  é o parâmetro de rigidez da mola e  $L$  é o comprimento do elemento de viga. O modelo de Pasternak considera dois parâmetros ( $k_{s1}$  e  $k_{s2}$ ) para o comportamento do solo. Esse modelo supõe que as molas são conectadas por uma camada incompressível que se deforma apenas por tensões de cisalhamento (Rosas; Silva; Silveira, 2018). A matriz de rigidez elementar do modelo de Pasternak é dada por (Teodoru; Muşat, 2008):

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{K}_{b1} + \mathbf{K}_{b2}, \quad (3)$$

sendo a matriz  $\mathbf{K}_{b1}$  dada pela Equação (1) e  $\mathbf{K}_{b2}$  por:



$$K_{b2} = \frac{k_{s2}}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ & & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & 36 & -3L & \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

em que  $k_{s2}$  representa o parâmetro de rigidez cisalhante da camada do modelo de Pasternak. Considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, a matriz de rigidez elementar do elemento de viga-pilar no sistema de coordenadas locais é dada por:

$$K_M = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 12c_1 & 6c_2 & 0 & -12c_1 & 6c_2 \\ 0 & 6c_2 & 4I & 0 & -6c_2 & 2I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -12c_1 & -6c_2 & 0 & 12c_1 & -6c_2 \\ 0 & 6c_2 & 2I & 0 & -6c_2 & 4I \end{bmatrix}, \quad (5)$$

em que  $c_1 = I/L^2$  e  $c_2 = I/L$ . Na Equação (5),  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $I$  é o momento de inércia e  $A$  é área da seção transversal. Na teoria clássica de Euler-Bernoulli, os planos normais ao eixo neutro da viga permanecem retos e normais após a deformação (Avramidis; Morfidis, 2006). A matriz de rigidez do elemento finito de viga com base elástica considerando o modelo de Pasternak é descrita por:

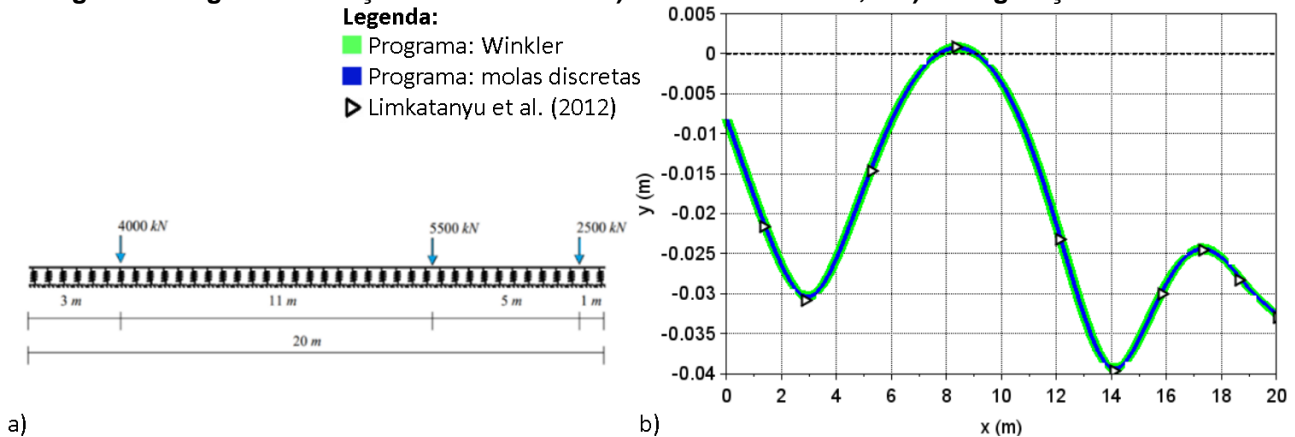
$$K = K_M + K_b. \quad (6)$$

Se  $k_{s2} = 0$ , a matriz  $K$  recai no modelo de Winkler, visto que  $K_{b2} = 0$ .

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Esta subseção traz a análise estática linear de vigas sobre base elástica e com as extremidades livres, considerando os modelos de solo de molas discretas, de Winkler e/ou de Pasternak. O primeiro exemplo diz respeito a uma viga com 20 m de comprimento e solicitada por forças concentradas, conforme o modelo estrutural ilustrado na Figura 1a. A estrutura tem módulo de elasticidade  $E = 200 \text{ GPa}$  e momento de inércia  $I = 0,001 \text{ m}^4$ . Nesse exemplo, são obtidas a configuração deformada da viga com fundação de Winkler cujo parâmetro  $k_{s1}$  é igual a  $30 \text{ MN/m}^2$ . A viga é discretizada por 80 elementos de viga.

**Figura 1 – Viga sobre forças concentradas: a) modelo estrutural; e b) configuração deformada.**



Fonte: Elaborada pelos autores.

Também é considerado o modelo de molas discretas cujos valores de rigidez das mesmas são determinados por:

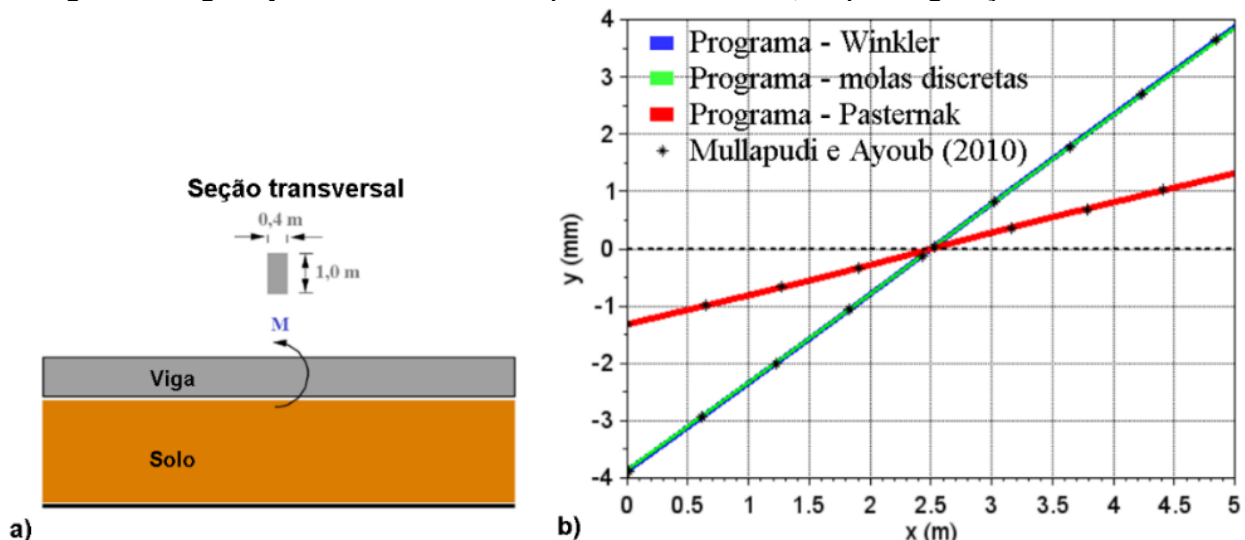
$$k_y = k_{s1} L_{infl}, \quad (7)$$

em que  $L_{infl}$  é o comprimento de influência da mola, que na maioria das aplicações numéricas coincide com o comprimento  $L$  do elemento finito usado na modelagem da estrutura. Na Figura 1b aparece a configuração deformada da viga havendo boa concordância com os resultados fornecidos por Limkatany et al. (2012).

O segundo problema trata de uma viga com comprimento igual a 5 m em contato com a argila arenosa, conforme o modelo estrutural mostrado na Figura 2a. A viga tem módulo de elasticidade  $E = 10,5$  MPa e seção transversal retangular com base  $b = 0,4$  m e altura  $h = 1,0$  m ( $A = 0,4$  m<sup>2</sup>). Esse problema foi estudado por Mullapudi e Ayoub (2010). A viga tem as extremidades livres e está submetida a uma carga momento no centro  $M = 50$  kN m.

A argila arenosa tem o módulo de elasticidade  $E_s = 45,5$  MPa e o coeficiente de Poisson  $\nu_s = 0,21$ . Os valores dos parâmetros do solo da fundação são  $k_{s1} = 3,081$  MPa e  $k_{s2} = 1,2449 \times 10^4$  kN. A viga é discretizada por 20 elementos finitos de viga. As configurações deformadas da viga considerando os modelos de solo de Winkler, de molas discretas e de Pasternak são apresentadas na Figura 2b. Nota-se a boa concordância entre os resultados obtidos com o programa desenvolvido e os apresentados por Mullapudi e Ayoub (2010).

Figura 2 – Viga sujeita a um momento: a) modelo estrutural; e b) configurações deformadas.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Nos problemas estudados, a interação entre o solo e a estrutura é tratada como bilateral. Esse tipo de contato considera que o solo reage tanto às solicitações de tração quanto às de compressão. Nesse caso, admite-se que o solo trabalha integralmente conectado à estrutura (Rosas; Silva; Silveira, 2017). Observa-se na Figura 2b que fica evidente que o sistema estrutural se torna mais rígido quando o segundo parâmetro do modelo de fundação elástica é considerado, ou seja, quando a fundação do tipo Pasternak é adotada para representar o solo.



Os modelos de solo definidos por apenas um parâmetro não representam as características de alguns tipos de fundações, uma vez que o solo é um corpo contínuo. Assim, o modelo com dois parâmetros de Pasternak é mais preciso para simular a fundação, o que torna a modelagem mais realística do comportamento do solo (Sapountzakis; Kampitsis, 2013).

## CONCLUSÃO

Nos exemplos apresentados, vê-se que a metodologia proposta representa de forma eficiente o comportamento linear dos problemas de interação solo-estrutura. A comparação com os resultados presentes na literatura e com as análises via o programa desenvolvido com o Scilab valida a formulação implementada. Os resultados numéricos mostraram a influência na rigidez dos sistemas estruturais ao se considerar o contato da viga com o solo. As configurações deformadas das vigas foram apresentadas, evidenciando as diferenças nas respostas preditas pelos modelos representativos do solo. Além disso, este estudo destacou a importância do modelo de Pasternak com dois parâmetros para uma representação mais realística do comportamento do solo. Foi observado que o sistema estrutural se torna mais rígido quando o segundo parâmetro do modelo de fundação elástica é considerado, ficando de acordo com a literatura científica. Por fim, é de suma importância a necessidade de considerar modelos de solo mais complexos em análises de interação solo-estrutura para obter resultados mais precisos.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPQ pelo apoio financeiro (PIBIC CNPq — CNPQ/Bolsa Iniciação científica).

## Conflito de interesse

Os autores declaram que não há conflito de interesse.

## REFERÊNCIAS

AVRAMIDIS, I. E.; MORFIDIS, K. Bending of beams on three-parameter elastic foundation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 2, p. 357-375, 2006.

DUTTA, S. C.; ROY, R. A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system. **Computer and Structures**, v.80, p. 1579-1584, 2002.

LIMKATANYU, S.; KUNTIYAWICHAI, K.; SPACONE, E.; KWON, M. Natural stiffness matrix for beams on Winkler foundation: exact force-based derivation. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 42, n. 1, p. 39-53, 2012.



MULLAPUDI, R.; AYOUB, A. Nonlinear finite element modeling of beams on two-parameter foundations. **Computers and Geotechnics**, v. 37, n. 3, p. 334-342, 2010.

PASTERNAK, P. L. On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. **Gos. Izd. Lit. po Strait i Arkh**, 1954.

ROSAS, L. R. B.; BATELO, E. A. P.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. Análise de vibração de vigas e colunas considerando a interação entre o solo e a estrutura. **Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia**, [S. l.], v. 2, n. 2, p. 225–236, 2017.

ROSAS, L. R. B.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. Nonlinear dynamic analysis of structures in contact with soil. **Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing.**, v. 34, n. 1, p. 1-14, 2018.

SAPOUNTZAKIS, E. J.; KAMPITSIS, A. E. Inelastic analysis of beams on two-parameter tensionless elastoplastic foundation. **Engineering Structures**, v. 48, p. 389-401, 2013.

SCILAB, versão 2023.0.0. Dassault Systèmes, Vélizy-Villacoublay, France, 2023.

TEODORU, I. B.; MUSAT, V. Beam elements on linear variable two-parameter elastic foundation. **Buletinul Institutului Politehnic din Iasi. Sectia Constructii, Arhitectura**, v. 54, n. 2, p. 69, 2008.

WINKLER, E. **Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit: mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik, für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architecten, etc.** H. Dominicus, 1867.

WORKU, A.; HABTE, B. Analytical formulation and finite-element implementation technique of a rigorous two-parameter foundation model to beams on elastic foundations. **Geomechanics and Geoengineering**, v. 17, n. 2, p. 547-560, 2022.

YOUNESIAN, D.; HOSSEINKHANI, A.; ASKARI, H.; ESMAILZADEH, E. Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. **Nonlinear Dynamics**, v. 97, n. 1, p. 853-895, 2019.