XIII Seminário de Extensão e Inovação
XXVIII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR
Ciência e Tecnologia na era da Inteligência Artificial: Desdobramentos no Ensino Pesquisa e Extensão
20 a 23 de novembro de 2023 - *Campus Ponta Grossa, PR*
SEI-SICITE 2023

Estimação *Online* de Parâmetros pelo Método dos Mínimos Quadrados Recursivos com Fator de Esquecimento em Tempo Discreto

Online Parameter Estimation by the Recursive Least Squares Method with Discrete Time Forgetting Factor

Walter Gabriel Lopes Pradela[1], Matheus Eduardo dos Santos Maran[2],Flávio Luiz Rossini[3]

RESUMO
O presente artigo busca apresenta um estudo teórico sobre a estimação de parâmetros por meio do algoritmo Mínimos Quadrados Recursivo para obtenção de forma *Online* de parâmetros, ou seja o algoritmo é implementado para ser utilizado em tempo real para o sistema escolhido. A utilização da estimação de parâmetros é um conceito fundamental para a aplicação de algum tipo de controle em um sistema e seu bom funcionamento como um todo. Com isso em mente o presente artigo busca (i) apresentar a fundamentação teórica clássica do algoritmo; (ii) mostrar o funcionamento do algoritmo em um sistema discreto simulado no *software* Matlab®; (iii) apresentar as características do algoritmo e como isso impacta na aplicação real.
PALAVRAS-CHAVE: Estimação *Online*. Método dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento. Sistema em tempo discreto.

ABSTRACT
This article seeks to demonstrate a theoretical study on parameter estimation using the Recursive Least Squares algorithm demonstrating its theory applied in discrete time using the Online parameter estimation approach, that is, the algorithm is implemented to be used in real time for the chosen system. The use of parameter estimation is a fundamental concept for the application of some type of control in a system and its proper functioning as a whole. With this in mind, this article seeks to (i) demonstrate the theoretical foundation behind the algorithm; (ii) demonstrate the functioning of the algorithm in a simulated discrete system using Matlab® software; (iii) present the characteristics of the algorithm and how these impacts on the actual application.
KEYWORDS: *Online* Estimation. Recursive Least Squares Method with Forgetting Factor. Discrete-time system

INTRODUÇÃO

O Método dos Mínimos Quadrados Recursivos (MQR) é uma técnica poderosa e versátil na área de controle, processamento de sinais, estatísticas e aprendizado de máquina (COLDEBELLA; BROLIN; ROSSINI, 2022)(CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022). O MMQR é utilizado para estimar parâmetros desconhecidos de um modelo matemático com base em observações de dados sequenciais. Esse método é especialmente útil em situações em que os parâmetros do sistema mudam ao longo do tempo. Dessa forma, torna-se necessário computar recursivamente e atualizar a estimação à medida que novas informações são recebidas (ROSSINI, 2020) (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023a e 2023b).

[1] Discente do Curso de Engenharia Eletrônica/DAELN. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: wpradela@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 4150554404011282.
[2] Discente do Curso de Engenharia Eletrônica/DAELN. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: matheusmaran@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 3092704155937472.
[3] Docente no Curso Engenharia Eletrônica/DAELN. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: flrossini@utfpr.edu.br. ID Lattes: 8616413126997528.

Neste método, cada nova observação de dados é incorporada à estimação existente de forma ponderada, assim o algoritmo é sensível a mudanças nos parâmetros. Isso resulta em uma estimação mais precisa à medida que mais dados são acumulados ao longo do tempo (ROSSINI, 2020) (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022). No decorrer deste texto é explicitado o funcionamento do método e os benefícios observados em relação a modelagem de um sistema.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) foi desenvolvido por Karl Friedrich Gauss no final do século 18 com o intuito de utilizar as informações passadas para prevêr a trajetóra de planetas e cometas (COELHO, 2004). O intuito foi selecionar parâmetros desconhecidos de um modelo matemático a fim que a soma dos quadrados da diferença entre os valores observados e dos calculados multiplicados por um valor que quantifica o grau da precisão sejam minimizadas. Desta forma, qualquer ruído ou erro das informações observadas afetam menos o modelo matemático (IOANNOU; SUN, 1996).

Para compreender o MQR é necessário compreender o método clássico, para isso definiu-se a saída de um sistema, expressada por:

$$y(n) = \theta(n)\varphi^T(n) + l(n) \quad (1)$$

sendo $\theta(n)$ o vetor dos parâmetros, $\varphi(n)$ o vetor das medidas passadas e $l(n)$ o erro de modelagem ou ruído (COELHO, 2004). Inicialmente negligenciou-se o erro de modelagem.

Ao omitir a variável independente n e reescrever a Eq (1) na forma matricial, obtém-se:

$$Y = \theta\phi \quad (2)$$

sendo ϕ a matriz das medidas, esta matriz possui mais linhas do que colunas.

A estimação do vetor de saída Y é expressada em:

$$\hat{Y} = \hat{\theta}\phi \quad (3)$$

sendo $\hat{Y}$ o sinal de saída a partir dos parâmetros estimados, $\hat{\theta}$.

Desta forma o erro da previsão, pode ser computada por:

$$\varepsilon = Y - \hat{\theta}\phi \quad (4)$$

Com o intuito de ponderar o erro da previsão, utilizou-se uma matriz diagonal W, em que na sua diagonal principal contém valores para ponderar o erro. Desta forma expressou-se como:

$$J = \left[Y - \hat{\theta}\phi\right]^T W\left[Y - \hat{\theta}\phi\right] \quad (5)$$

Ao realizar a derivada parcial da Eq. (5) em relação a $\hat{\theta}$, em seguida considerou-se a taxa de variação do erro nulo e isolou-se $\hat{\theta}$, da forma:

$$\hat{\theta} = [\phi^T W\phi]^{-1}\phi^T WY \quad (6)$$

Nota-se que a ponderação deve ser igual para todas as medidas, ou seja, a variância deve ser igual, desta forma reescreveu-se a Eq. (6) como:

$$\hat{\theta} = [\phi^T \sigma^2\phi]^{-1}\phi^T\sigma^2 Y \quad (7)$$

Simplificou-se a Eq. (7) e obteve-se:

$$\hat{\theta} = [\phi^T\phi]^{-1}\phi^T Y \quad (8)$$

Para a utilização desta definição clássica do MMQ demanda de grande armazenamento das variáveis e seus respectivos vetores e matrizes. Por este motivo, torna-se interessante a manipular a Eq. (8), a fim de torna-la recursiva e assim diminuir o espaço de armazenamento, além da possibilidade de implementação *Online* para a análise em tempo real do sistema.

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVO

A utilização do algoritmo MQR é interessante para sistemas discretos invariantes no tempo, onde a robustez do algoritmo e sua adaptabilidade as informações faz com que seja amplamente utilizada como um estimador de parâmetros para sistemas de controle das mais variadas topologias (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023a e 2023b)(ROSSINI, 2020)(CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022).

O MQR caracteriza-se por possuir uma matriz de covariância dos erros denominada $P(n)$, essa é uma representação das incertezas sobre os parâmetros. A matriz de covariância pode ser utilizada para atualizar a velocidade de adaptação do controlador (COLDEBELLA; BROLIN; ROSSINI 2022). O algoritmo geralmente é aplicado em casos de tempo discreto, desta forma são coletadas diversas amostras e cada tempo de amostragem, essa representa uma iteração do algoritmo.

A partir da seção anterior, a Eq. (8) realiza a estimação no instante n do tempo de amostragem, desta forma separaram-se as parcelas a título de implementação computacional em tempo real (*Online*), da forma:

$$P(n) = [\phi^T(n)\phi(n)]^{-1} \quad (9)$$

$$R(n) = \phi^T(n)Y(n) \quad (10)$$

Ao expandir a matriz ϕ, notou-se que os valores anteriores são armazenados e pode-se atualizar a matriz ao adicionar as informações mais recentes encontradas no vetor de medição, desta forma manteve-se a matriz $\phi^T(n)\phi(n)$ e somou-se os vetores de medições com as novas informações a matriz. A atualização é expressa por:

$$\phi^T(n+1)\phi(n+1) = \phi^T(n)\phi(n) + \varphi(n+1)\varphi^T(n+1) \quad (11)$$

Nota-se que a parcela $R(n)$ possui uma matriz ϕ^T,desta forma a atualização desta matriz é obtida utilizando o mesmo princípio da Eq. (11), logo soma-se o vetor de medição atualizada enquanto a atualização da saída $y(n)$ é somada a matriz $Y(n)$, na parcela $P(n)$ deve realisar-se a inversa para obter a matriz de covariância atualizada, desta forma após simplificar, a atualização da parcela $R(n)$ e da matriz de covariância $P(n)$ é obtida, respectivamente por:

$$R(n+1) = R(n) + \varphi(n+1)y(n+1) \quad (12)$$

$$P^{-1}(n+1) = P^{-1}(n) + \varphi(n+1)\varphi^T(n+1) \quad (13)$$

A partir da Eq. (4), obtém-se a atualização por meio de:

$$\varepsilon(n+1) = y(n+1) - \varphi^T(n+1)\hat{\theta}(n+1) \quad (14)$$

Ao isolar a saída atualizada $y(n+1)$ e substituir na Eq. (12), obteve-se:

$$R(n+1) = R(n) + \varphi(n+1)\varepsilon(n+1) + \varphi(n+1)\varphi^T(n+1)\hat{\theta}(t) \quad (15)$$

Para evitar o cálculo da inversa da matriz de covariância a cada iteração n reescreveu-se a Eq. (13), como:

$$P(n+1) = P(n) - \frac{P(n)\varphi(n+1)\varphi^T(n+1)P(n)}{1 + \varphi^T(n+1)P(n)\varphi(n+1)} \quad (16)$$

Ao substituir as Equações (4) e (16) na Eq. (15), obteve-se:

$$\frac{\hat{\theta}(n+1)}{P(n+1)} = \frac{\hat{\theta}(n)}{P(n)} + \varphi(n+1)\varepsilon(n+1) + \frac{\hat{\theta}(n)}{P(n)-P(n+1)} \quad (17)$$

Simplificou-se a Eq. (17) e isolou-se $\hat{\theta}(n+1)$, da forma:

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + P(n+1)\varphi(n+1)\varepsilon(n+1) \quad (18)$$

O fator $P(n+1)\varphi(n+1)$, denominou-se K chamado de ganho do estimador, esse fator é responsável por ponderar o erro, a atualização deste fator é dada por:

$$K(n+1) = \frac{P(n)\varphi(n+1)}{1+\varphi^T(t+1)P(n)\varphi(t+1)} \quad (19)$$

Ao substituir o fator de ganho nas Equações (17) e (18), obtém-se respectivamente:

$$P(n+1) = P(n) - K(n+1)[P(n)\varphi(n+1)]^T \quad (20)$$

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + K(n+1)\varepsilon(n+1) \quad (21)$$

Nas Eq. (19) e (20) nota-se que ao aumentar o número de iterações n existe a possibilidade de convergência dos parâmetros calculados, essa convergência é demonstrada pela diminuição dos elementos da matriz de covariância (COELHO, 2004). Para ponderar com maior peso as informações mais recentes, implementou-se o Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MQR-FE).

O Fator de Esquecimento (FE) atenua as informações passadas, tal fator possui um valor entre 0 e 1. O FE foi introduzido nos cálculos de matriz de covariância e no ganho do estimador, desta forma atualizaram-se as Equações (19) e (20), respectivamente:

$$K(n+1) = \frac{P(n)\varphi(n+1)}{\lambda+\varphi^T(n+1)P(n)\varphi(n+1)} \quad (22)$$

$$P(n+1) = \frac{1}{\lambda}\{P(n) - K(n+1)[P(n)\varphi(n+1)]^T\} \quad (23)$$

METODOLOGIA

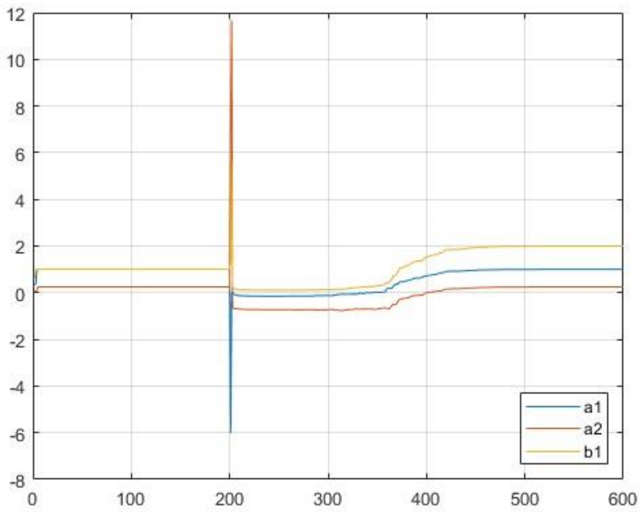
Para mostrar o algoritmo do MRQ-FE em execução, utilizou-se o *software* Matlab® de forma, implementado o algoritmo de forma *Online*. Assim, definiu-se um processo discreto expressado por uma equação a diferenças com os seguintes parâmetros (a1, a2, b1, respectivamente), onde utilizou um FE de 0,95. Segue a equação:

$$y(n) = -1y(n-1) - 0{,}25y(n-2) + bu(n-1) + \varepsilon(n) \quad (24)$$

Sendo b um parâmetro vária de 1 para 2 após duzentas iterações, essa mudança pode representar a mudança de um sinal de entrada. Assumiu-se que $\varepsilon(n)$ é nulo.

Na figura 1 é demonstrado o comportamento dos parâmetros ao longo de uma amostragem de 600 iterações, nota-se que na iteração 201 existe um ruído devido a mudança do parâmetro b1, essa mudança impacta em todos os parâmetros estimados.

Figura 1 – Estimação dos parâmetros



Fonte: Autoria Própria (2023)

Segue os resultados de alguns pontos utilizando FE de 0,95:

Tabela 1 - Resultados

Parâmetro	Valor ideal após chaveamento	Iteração 490	Erro (%)
a1	1	0,9945	0,55
a2	0,25	0,2454	1,84
b1	2	1,9910	0,45

Fonte: Autoria Própria (2023)

Nota-se que os valores da Tabela 1 estão com uma aproximação satisfatória com os valores ideas impostos, desta forma observou-se a capacidade do algoritmo estimar em tempo real de parâmetros, desta maneira podendo ser aplicada a diversas situações.

CONCLUSÃO

Apresentou-se neste trabalho um método de estimação de parâmetros online pelo MQR-FE no tempo discreto e uma aplicação em sistemas que possuem parâmetros que podem ou não variar com o tempo. Ao aplicar em um sistema simulado discreto, notou-se que o tempo de resposta do algoritmo possui um determinado *delay* para atingir o parâmetro desejado, essa é uma característica do algoritmo em que se torna necessário determinadas iterações para obter o parâmetro desejado após uma mudança de algum parâmetro como no exemplo demonstrado no artigo.

Espera-se que o MQR-FE apresentado, contribua a projetos de sistema de controle adaptativos, os quais podem demandar de tal expertisse.

Agradecimentos

A Universidade Tecnólogica Federal do Paraná pela estrutura e licença necessária para implementar as simulações apresentadas.

Ao Professor Dr. Flávio Luiz Rossini pela orientação prestada para a realização do trabalho.

Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

CANHAN, Diego Carrião; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. Aplicação do método do gradiente e do método dos mínimos quadrados recursivo para análise de desempenho do controle adaptativo por modelo de referência. In: CANHAN, Diego Carrião; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. **Engenharia elétrica: sistemas de energia elétrica e telecomunicações 2**. [S. l.]: Atena Editora, 2022. p. 91-100. ISBN 9786525807270. Disponível em: https://doi.org/10.22533/at.ed.2702211118. Acesso em: 13 set. 2023.

COELHO, Antonio Augusto Rodrigues; COELHO, Leandro dos Santos. **Identificação de sistemas dinâmicos lineares**. [S.l.]: Editora UFSC, 2004.

COLDEBELLA, Henrique; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. Análise de algoritmos de estimação paramétrica aplicados ao projeto de controlador adaptativo por modelo de referência. In: COLDEBELLA, Henrique; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. **Engenharia elétrica: sistemas de energia elétrica e telecomunicações 2**. [S. l.]: Atena Editora, 2022. p. 47-58. ISBN 9786525807270. Disponível em: https://doi.org/10.22533/at.ed.2702211114. Acesso em: 13 set. 2023.

COLDEBELLA, Henrique; ROSSINI, Flávio Luiz. Desenvolvimento e Implementação do Método dos MQR-FE Acoplado a um Sistema de CAMR. In: COLDEBELLA, Henrique; ROSSINI, Flávio Luiz. **Engenharia de controle e automação: estudos fundamentais**. [S. l.]: Editora Conhecimento Livre, 2023b. ISBN 9786553672604. Disponível em: https://doi.org/10.37423/230107095. Acesso em: 13 set. 2023.

COLDEBELLA, Henrique; ROSSINI, Flávio Luiz. Design and Simulation of a Model Reference Adaptive Control System Using the Recursive Least Squares Method with Forgetting Factor for Gain Adjustment. In: COLDEBELLA, Henrique; ROSSINI, Flávio Luiz. **Development and Its Applications in Scientific Knowledge**. [S. l.]: Seven Editora, 2023a. p. 3499-3515. ISBN 978-65-84976-28-3. Disponível em: https://doi.org/10.56238/devopinterscie-287. Acesso em: 18 maio 2023.

IOANNOU, P. A.; SUN, J. Robust Adaptive Control. Editado por PTR Prentice-Hall. 1996

ROSSINI, Flávio Luiz. **Métodos de Filtragem, Estimação e Controle Adaptativo Indireto Aplicados a Sistemas de Teleoperação Bilateral**. pt. PhD thesis. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação – Universidade Estadual de Campinas, 2020, p. 92. Disponível em:https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UNICAMP-30_a4357c8ea5602bb2b5b0d556e8c3a9 1e. Acesso em: 06 set. 2023.