



Modelagem no domínio do tempo, discretização com segurador de ordem zero e simulação computacional de um circuito passivo

Modeling in the time domain, discretization with a zero-order hold, and computational simulation of a passive circuit

Matheus Eduardo dos Santos Maran¹, Walter Gabriel Lopes Pradela², Flavio Luiz Rossini³

RESUMO

O presente artigo propõe um estudo a respeito de técnicas de discretização para modelagem de sistemas no domínio do tempo discreto. As técnicas de discretização são fundamentais na análise e controle de sistemas contínuos, permitindo a conversão de modelos contínuos em modelos discretos. Esses passos são úteis para o desenvolvimento de aplicativos e sistemas computacionais. Este artigo apresenta duas técnicas de discretização de sistemas contínuos sendo o Método *Zero-Order Hold* e o Método de *Tustin* que, posteriormente, são aplicadas a um circuito RLC série e simuladas com o auxílio do *software* Matlab®, para validação das técnicas estudadas.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem no domínio do tempo. Discretização no domínio da frequência. Simulação numérica.

ABSTRACT

The present article proposes a study on discretization techniques for modeling systems in the discrete-time domain. Discretization techniques are fundamental in the analysis and control of continuous systems, allowing the conversion of continuous models into discrete models. These steps are useful for the development of applications and computational systems. This article presents two continuous time discretization techniques: the Zero-Order Hold Method and the Tustin Method, which are subsequently applied to a series RLC circuit and simulated using Matlab® software for validation of the studied techniques.

KEYWORDS: Modeling in the time domain. Discretization in the frequency domain. Numerical simulation.

INTRODUÇÃO

A discretização desempenha um papel crucial em situações em que fenômenos contínuos precisam ser modelados ou analisados em sistemas computacionais, que geralmente operam com valores discretos (COELHO, 2004). A conversão de dados contínuos em discretos é frequentemente realizada através de processos de amostragem ou quantização, nos quais intervalos são selecionados para representar os dados contínuos de forma aproximada (CHAPRA; CANALE, 2014).

Essa técnica não apenas simplifica a manipulação de dados em sistemas computacionais, além de permitir a aplicação de métodos analíticos e computacionais mais acessíveis (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023) (NISE, 2012). Existem diversos métodos que realizam a discretização de sistemas contínuos. O presente artigo abordou (i) o Método *Zero-Order Hold* e (ii) o Método de *Tustin*.

¹ Discente do Curso de Engenharia Eletrônica/DAELN. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: matheusmaran@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 3092704155937472.

² Discente do Curso de Engenharia Eletrônica/DAELN. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: wpradela@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 4150554404011282.

³ Docente no DAELN - Departamento Acadêmico de Eletrônica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: frossini@utfpr.edu.br. ID Lattes: 8616413126997528.

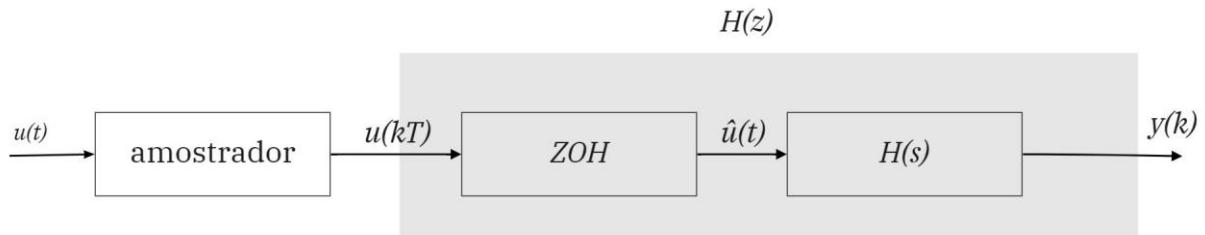


TÉCNICAS DE DISCRETIZAÇÃO

MÉTODO ZERO-ORDER HOLD

Este método consiste na utilização de um amostrador ideal e um Segurador de Ordem Zero (do inglês, *Zero-Order-Holder* - ZOH) em cascata com o sistema. O amostrador é em síntese um chaveamento que fecha a cada T segundos, e o segurador tem a função de manter o último valor amostrado da variável mensurada (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022). Na Figura 1, ilustra-se um diagrama de blocos de um amostrador com ZOH.

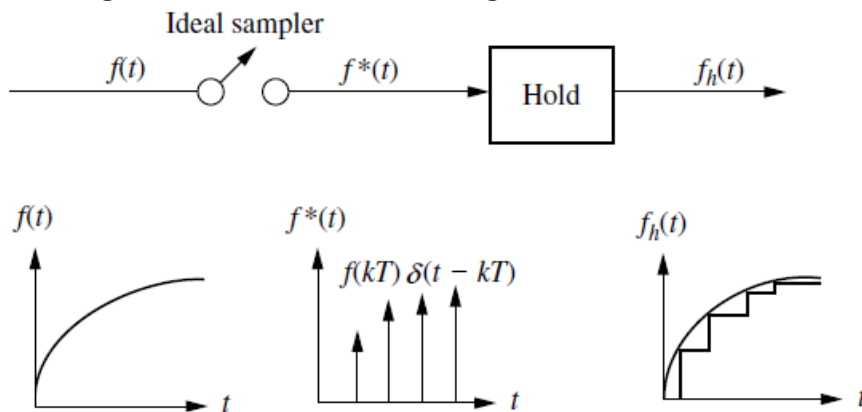
Figura 1 – Diagrama de Blocos do método ZOH



Fonte: Coldebella e Rossini (2023).

Ao utilizar um Segurador de Ordem Zero, obtém-se um sinal $\hat{u}(t)$ que caracteriza uma interpolação entre os impulsos discretos do sinal $u(kT)$ (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023) (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2023). Na Figura 2, resumiu-se a função do ZOH.

Figura 2 - Amostrador Ideal e Segurador de Ordem Zero.



Fonte: Nise (2012).

sendo a função $f^*(t)$ é representada por uma sequência de funções impulso. O ZOH gera uma aproximação em forma de escada para $f(t)$. Portanto, a saída do ZOH é uma sequência de funções degrau cuja amplitude é $f(t)$ no instante de amostragem, ou $f(kT)$ (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022). A função de transferência do segurador de ordem zero é dada por:

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \tag{1}$$



Um amostrador e um ZOH podem seguir o sinal de entrada se T for pequeno em comparação com as mudanças transitórias no sinal (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2023).

Para encontrar a função de transferência discreta basta aplicar a Transformada Z no processo em cascata com o ZOH da seguinte forma:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = Z\{G_h(s)G_p(s)\} = Z\left\{(1 - e^{-Ts})\frac{G_p(s)}{s}\right\} \quad (2)$$

sendo $G_h(s)$ e $G_p(s)$ as funções de transferência do ZOH e do processo, respectivamente (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023) (CANHAN; BROLIN; ROSSINI, 2022).

MÉTODO DE TUSTIN

O Método de Tustin ou Aproximação Bilinear produz a melhor correspondência no domínio da frequência entre os sistemas de tempo contínuo e os sistemas discretizados. Este método relaciona as funções de transferência nos domínios s e Z a partir da seguinte aproximação (COLDEBELLA; ROSSINI, 2023):

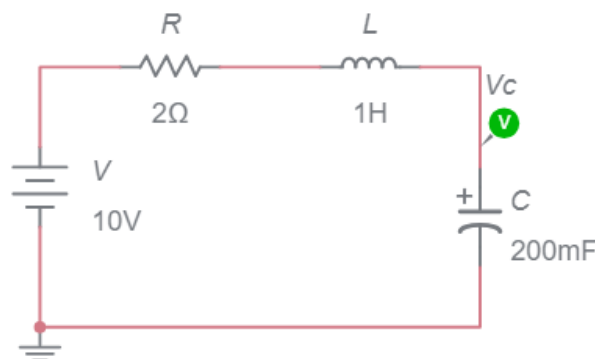
$$s = \frac{2(z - 1)}{T(z + 1)} \quad (3)$$

sendo T o período de amostragem, assim como no método ZOH, deve ser suficientemente pequeno para que a curva discreta se aproxime da curva contínua.

METODOLOGIA

Para validar as técnicas de discretização apresentadas por esse artigo, escolheu-se um circuito RLC série com uma entrada em degrau, e a saída sendo a tensão no capacitor, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – circuito RLC série



Fonte: Autoria Própria, Multisim (2023).

A função de transferência contínua que representa a tensão no capacitor em um circuito RLC série como da Figura 3 é dada por (NISE, 2012):

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (4)$$



Ao substituir os valores dos parâmetros na Eq. (4), ilustrados na Figura 3, obtém-se:

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{0,2s^2 + 0,4s + 1} \quad (5)$$

A Eq. (5) é a função de transferência que será discretizada a partir dos métodos abordados nas Eqs. (2) e (3).

RESULTADOS

MÉTODO ZERO-ORDER HOLD

Para obter a versão discreta da Eq. (5), utilizou-se o método ZOH e substituiu-se as funções na Eq. (2):

$$\frac{V_c(z)}{V(z)} = z \left((1 - e^{-Ts}) \frac{1}{0,2s^3 + 0,4s^2 + s} \right) \quad (6)$$

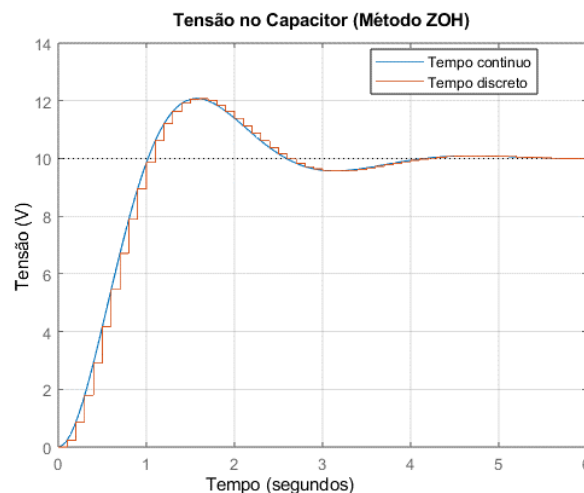
Adotou-se um período de amostragem T de 0,1 segundos e tomou-se a transformada Z da Eq. (5):

$$\frac{V_c(z)}{V(z)} = \frac{0.023317z + 0.021812}{z^2 - 1.7736z + 0.081873} \quad (7)$$

sendo $\frac{V_c(z)}{V(z)}$ a função de transferência discreta da tensão no capacitor do circuito RLC série da Figura 3, obtida através do método ZOH.

Na Figura 4, ilustra-se a resposta contínua Eq. (5) e a resposta discreta obtida na Eq. (7) com uma amostragem de 0,1 segundos.

Figura 4 – Resposta contínua/discreta Método ZOH



Fonte: Autoria Própria (2023).



MÉTODO DE TUSTIN

Para discretizar a Eq. (5), utilizou-se o método de Tustin e substituiu-se a Eq. (3) na Eq. (5), como segue:

$$\frac{V_c(z)}{V(z)} = \frac{1}{0,2 \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right)^2 + 0,4 \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right) + 1} \quad (8)$$

Adotou-se também um período de amostragem T de 0,1 segundos e substituiu-se na Eq. (8)

$$\frac{V_c(z)}{V(z)} = \frac{1}{0,2 \left(\frac{2(z-1)}{0,1(z+1)} \right)^2 + 0,4 \left(\frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right) + 1} \quad (9)$$

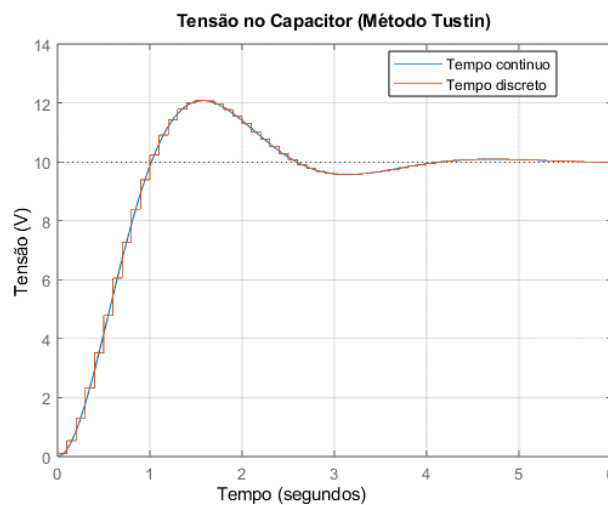
Simplificou-se a Eq. (9):

$$\frac{V_c(z)}{V(z)} = \frac{0,1z^2 + 0,2z + 0,01}{0,89z^2 - 1,58z + 0,73} \quad (10)$$

A Eq. (10) representa a função de transferência discreta da tensão no capacitor do circuito RLC série da Figura 3, obtida através do método de Tustin.

Na Figura 5, ilustra-se a resposta contínua referente a Eq. (5) e a resposta discreta obtida na Eq. (10) com uma amostragem de 0,1 segundos.

Figura 5 - Resposta contínua/discreta Método de Tustin



Fonte: Autoria Própria (2023).



CONCLUSÃO

No presente trabalho foram apresentadas duas técnicas de discretização de sistemas contínuos sendo (i) o Método *Zero-Order Hold* e (ii) o Método de *Tustin*, e esses foram aplicados a um circuito RLC série. A validação ocorreu com a simulação de ambas as técnicas com o auxílio do *software* Matlab®.

Verificou-se que ambas as técnicas resultam em aproximações satisfatórias no tempo discreto para sistemas no tempo contínuo.

Agradecimentos

Agradeço ao Professor Dr. Flávio Luiz Rossini pela valiosa orientação da pesquisa.

Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

CANHAN, Diego Carrião; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. Design, simulation and analysis of challenges of parametric estimation algorithms applied to adaptive control by reference model. In: CANHAN, Diego Carrião; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. **Development and its applications in scientific knowledge**. [S. l.]: Seven Editora, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.56238/devopinterscie-247>. Acesso em: 13 set. 2023.

CANHAN, Diego; BROLIN, Leandro; ROSSINI, Flávio. Aplicação do método do gradiente e do método dos mínimos quadrados recursivo para análise de desempenho do controle adaptativo por modelo de referência. In: CANHAN, Diego Carrião; BROLIN, Leandro Castilho; ROSSINI, Flávio Luiz. **Engenharia elétrica: sistemas de energia elétrica e telecomunicações 2**. [S. l.]: Atena Editora, 2022. p. 91-100. ISBN 9786525807270. Disponível em: <https://doi.org/10.22533/at.ed.2702211118>. Acesso em: 11 set. 2023.

CHAPRA, Steven; CANALE, Raymond. **Numerical Methods for Engineers**. McGraw-Hill Education, 2014.

COELHO, Antonio; COELHO, Leandro. **Identificação de sistemas dinâmicos lineares**. [S.l.]: Editora UFSC, 2004.

COLDEBELLA, Henrique; ROSSINI, Flávio Luiz. Design and Simulation of a Model Reference Adaptive Control System Using the Recursive Least Squares Method with Forgetting Factor for Gain Adjustment. In: COLDEBELLA, Henrique; ROSSINI, Flávio Luiz. **Development and Its Applications in Scientific Knowledge**. [S. l.]: Seven Editora, 2023. p. 3499-3515. ISBN 978-65-84976-28-3. Disponível em: <https://doi.org/10.56238/devopinterscie-287>. Acesso em: 11 set. 2023.

NISE, Norman S. **Control Systems Engineering**. 6ª edição. Editora: Wiley, 2012.