



Síntese de controlador robusto com custo garantido \mathcal{H}_∞ via LMIs para aplicações com motor de indução trifásico

Robust controller synthesis with guaranteed cost \mathcal{H}_∞ via LMIs for three-phase induction motor applications

Gabriel Gomes da Silva¹, Rodrigo da Ponte Caun²,
Willian Ricardo Bispo Murbak Nunes³

RESUMO

Motores de indução são amplamente utilizadas em uma ampla gama de aplicações, como máquinas industriais, sistemas de transporte e dispositivos domésticos. O controle de motores de indução é um desafio devido ao seu comportamento não-linear e às incertezas presentes. Desigualdades matriciais lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) são uma ferramenta poderosa para projeto de controladores robustos. Este trabalho apresenta a síntese de controlador robusto com custo garantido \mathcal{H}_∞ para motores de indução via LMIs. A abordagem proposta considera como incertezas paramétricas do motor a velocidade do estator e a constante de torque. Resultados obtidos demonstram a factibilidade de síntese de controlador robusto com custo garantido \mathcal{H}_∞ e \mathcal{D} -estabilidade para uma região circular do plano complexo.

PALAVRAS-CHAVE: controle vetorial; desigualdades matriciais lineares; sistemas incertos.

ABSTRACT

Induction motors are widely used in a broad range of applications, such as industrial machinery, transportation systems, and household devices. Controlling induction motors is a challenge due to their nonlinear behavior and inherent uncertainties. Linear Matrix Inequalities (LMIs) are a powerful tool for robust controller design. This work presents the synthesis of a robust controller with guaranteed cost \mathcal{H}_∞ for induction motors using LMIs. The proposed approach takes into account motor speed and torque constant as parametric uncertainties. The obtained results demonstrate the feasibility of synthesizing a robust controller with guaranteed cost \mathcal{H}_∞ and \mathcal{D} -stability for a circular region in the complex plane.

KEYWORDS: vector control; linear matrix inequalities; uncertain systems.

INTRODUÇÃO

Os motores de indução trifásicos (MITs) são amplamente utilizados devido à sua confiabilidade e baixo custo de manutenção. No entanto, o controle eficaz desses motores em face de incertezas, distúrbios e não linearidades é desafiador.

Com o avanço da tecnologia, surgem algoritmos de controle mais sofisticados, impulsionados pela teoria de controle robusto, tornando os sistemas de acionamento mais adaptáveis e eficientes. Neste sentido, pode-se citar os estudos de (ORTUNHO et al., 2016) e (ORTUNHO, 2020), que

¹ Bolsista UTFPR. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: gabrielgomessilva@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 6466117911910350.

² Docente no curso de Engenharia Elétrica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: rodrigocaun@utfpr.edu.br. ID Lattes: 3945379729001649.

³ Docente no curso de Engenharia Elétrica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: willianr@utfpr.edu.br. ID Lattes: 4889618956920630.



propôs controladores robustos para os MITs, considerando incertezas, falhas e performance \mathcal{H}_∞ . Vale ressaltar que autor mencionado considerou somente como incertezas as constantes de tempo do motor.

O seguinte trabalho apresenta o projeto de um controlador robusto para um MITs modelado na representação d-q. As principais contribuições incluem a síntese de um controlador robusto que garante a estabilidade em cenários considerando duas incertezas da dinâmica do motor, a factibilidade de um controlador ótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞ e um sub-ótimo restrito a uma região específica de alocação dos polos, atendendo aos índices de desempenho estabelecidos para o sistema. Essas abordagens visam aprimorar o controle dos MITs, considerando uma variedade de desafios associado à sua operação.

METODOLOGIA

MODELAGEM EM ESPAÇO DE ESTADO DO MOTOR DE INDUÇÃO

Para a modelagem do motor foi utilizado a técnica de controle vetorial baseado na orientação de campo do rotor, e o desacoplamento de um sistema de coordenadas rotativo d-q, fixo ao campo girante da máquina. Esse sistema permite o controle separado dos componentes de fluxo (eixo direto - d) e torque (eixo de quadratura - q) (LEONHARD, 2001).

As matrizes da modelagem em espaço de estado do motor de indução considerando incertezas paramétricas são dadas por:

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} -\left(\frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{R_r(1-\sigma)}{\sigma L_r}\right) & \omega_s & \frac{L_m R_r}{\sigma L_s L_r^2} & 0 \\ -\omega_s & -\frac{R_s}{\sigma L_s} & -\frac{\omega_s L_m}{\sigma L_s L_r} & 0 \\ \frac{L_m R_r}{L_r} & 0 & -\frac{R_r}{L_r} & 0 \\ 0 & \frac{K_t}{J} & 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix}, \mathbf{C}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{x}(t)^T \in \mathbb{R}^4 = [i_{ds}^e \ i_{qs}^e \ \phi_{dR}^e \ \omega_{dR}^e]^T$ é o vetor de estados, tal que, as variáveis de estados $i_{ds}^e, i_{qs}^e \in \mathbb{R}$ representam as componentes de eixo direto e de quadratura da corrente do estator, e $\phi_{dR}^e, \omega_{dR}^e \in \mathbb{R}$ são as variáveis que descrevem as componentes de eixo direto e de quadratura do fluxo do rotor. A ação de controle $\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} V_{ds}^e \\ V_{qs}^e \end{bmatrix}$.

O motor de indução adotado é do tipo rotor gaiola de esquilo, 0.25 HP, 4 pólos, velocidade nominal de 1725 rpm, tensão nominal 380/220 V, frequência de 60 Hz. Os parâmetros da dinâmica do motor foram obtidos por (FURTUNATO; SALAZAR; ARAÚJO, 2001) e estão descritos na Tabela (1).



Tabela 1 – Parâmetros do motor de indução.

Parâmetro do motor	Símbolo	Valores	Unidade
Resistência do estator	R_s	29,5012	Ω
Resistência do rotor	R_r	17,8384	Ω
Indutância do estator	L_s	1,0951	H
Indutância do rotor	L_r	1,1054	H
Indutância mútua	L_m	1,0417	H
Momento de inércia	J	0,0005	$Kg.m^2$
Coefficiente de atrito viscoso	B	0,003	$m/rad.s$
Fluxo nominal do rotor	-	0,93	Wb

CONTROLE ROBUSTO COM INCERTEZAS POLITÓPICAS

Restrições LMIs para custo garantido \mathcal{H}_∞ .

A norma \mathcal{H}_∞ representa a máxima magnitude alcançada pelo diagrama de valores singulares em sistemas MIMO (*Multiple Input Multiple Output*). Minimizar a norma \mathcal{H}_∞ é essencial para reduzir os efeitos de uma entrada externa $\mathbf{w}(t)$ nas saídas $\mathbf{y}(t)$ do sistema. A condição para minimizar \mathcal{H}_∞ é expressa como $\mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t) - \gamma^2\mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) < 0$, onde γ é o menor valor que satisfaz essa condição.

Considere o sistema em (1) com lei de controle dada por $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} + \mathbf{B}_2(\alpha)\mathbf{u} + \mathbf{B}_1(\alpha)\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(\alpha)\mathbf{x} \end{cases} \quad (1)$$

Lema 1. O sistema (1) é estabilizável por meio de realimentação de estados se existir uma solução para o problema de convexo de otimização e existirem matrizes $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$\begin{cases} \min \mu \\ \mathbf{Z}, \mathbf{W} = \mathbf{W}^T > 0, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{B}_{2i}\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_{2i}^T & \mathbf{W}\mathbf{C}_i^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{D}_{2i}^T & \mathbf{B}_{1i} \\ \mathbf{C}_i\mathbf{W} + \mathbf{D}_{2i}\mathbf{Z} & -\mathbf{I} & \mathbf{D}_{1i} \\ \mathbf{B}_{1i}^T & \mathbf{D}_{1i}^T & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \end{cases} \quad (2)$$

em que $\mathbf{K} = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1}$ assegura $\|H(s)\|_\infty \leq \sqrt{\mu}$, $\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2) \in \mathcal{D}$.

Prova: Maiores detalhes podem ser encontrados em (BOYD et al., 1994) e (ZHOU; DOYLE; GLOVER et al., 1996).

Restrições LMIs para \mathcal{D} -estabilidade.

Lema 2. A estabilidade de um sistema $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{M}\mathbf{z}$ é assegurada quando $\lambda(\mathbf{M})$ em uma região específica do plano complexo satisfaça a restrição $(\mathbf{M} + \sigma\mathbf{I})^T\mathbf{P}(\mathbf{M} + \sigma\mathbf{I}) - \rho^2\mathbf{P} < 0$, onde σ e ρ são valores escalares que representam o centro e o raio de uma circunferência.



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W} > 0, \\ \left[\begin{array}{cc} \mathbf{W}\rho^2 & \mathbf{W}\mathbf{A}(\alpha)^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{B}(\alpha)^T + \mathbf{W}\sigma \\ \mathbf{A}(\alpha)\mathbf{W} + \mathbf{B}(\alpha)\mathbf{Z} + \mathbf{W}\sigma & \mathbf{W} \end{array} \right] > 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

Prova: Maiores detalhes podem ser encontrados em (NUNES et al., 2017).

AMBIENTE DE DESENVOLVIMENTO E VALIDAÇÃO DOS CONTROLADORES

A formulação das desigualdades matriciais lineares (LMIs), utilizadas neste estudo, foi realizada por meio da linguagem YALMIP (LOFBERG, 2004), e a resolução foi efetuada com os *solvers* Sedumi (STURM, 1999) e LMILab (GAHINET et al., 1994).

RESULTADOS

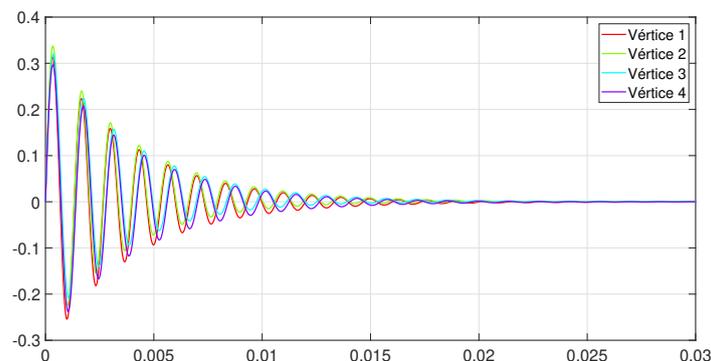
CONTROLADOR ROBUSTO COM CUSTO GARANTIDO \mathcal{H}_∞

Foi considerado um cenário onde o sistema está submetido a duas fontes de incertezas, definidas de tal forma que a velocidade $\omega_s \in [5, 2\pi f_n]$, $f_n = 60 \text{ Hz}$ e a constante de torque $K_t \in [0,9K_{tn}, K_{tn}]$, K_{tn} é o valor nominal. Neste caso o sistema é representado por meio de quatro vértices. Após a execução das LMIs (2), os ganhos obtidos do controlador são:

$$K = \begin{bmatrix} 10.7400 & -3.2466 & -155.6972 & -34.6973 \\ -10.0617 & -26.6645 & 9.4110 & -482.1484 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Além disso, ilustramos a resposta temporal do sistema correspondente na Figura 1.

Figura 1 – Resposta temporal do sistema realimentado com controlador ótimo com custo garantido $\mathcal{H}_\infty(\omega_s)$.



Fonte: Autoria própria (2023).

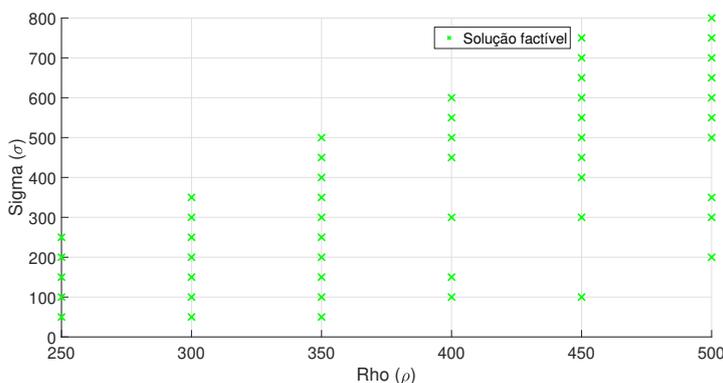
CONTROLADOR SUBÓTIMO COM CUSTO GARANTIDO \mathcal{H}_∞

A Figura 2 apresenta os diferentes valores de ρ e σ para o projeto do controlador, o que possibilita a escolha de diferentes índices de desempenho ao sistema.



Com o objetivo de consolidar os resultados do controlador subótimo em diferentes cenários de alocação, a Tabela 2 apresenta os resultados em relação à norma \mathcal{H}_∞ , da norma do controlador em cada situação e o tempo de estabelecimento.

Figura 2 – Mapeamento de factibilidade para soluções do controlador subótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞ .



Fonte: Autoria própria (2023).

Tabela 2 – Comparativo de índices entre controlador robusto ótimo e subótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞ .

Casos	ρ	σ	$\ \mathcal{H}_\infty\ $	$\ \mathbf{K}\ $	Tempo de estabelecimento t_e [s]
Caso 1	-	-	209.32	484.23	0.015
Caso 2	400	500	$2.31 \cdot 10^4$	567.99	0.026
Caso 3	450	500	$1.76 \cdot 10^4$	555.16	0.035
Caso 4	500	800	$2.85 \cdot 10^4$	2577.6	0.012

A norma \mathcal{H}_∞ é uma métrica crucial para avaliar a robustez de sistemas em relação à rejeição de perturbações externas. Sistemas com normas \mathcal{H}_∞ menores são mais capazes de lidar com variações nos parâmetros ou distúrbios externos, assegurando um desempenho estável em condições adversas. Ao comparar diferentes casos de estudo, ajustar o raio ρ na região de alocação dos polos impacta a norma \mathcal{H}_∞ . Um raio maior resulta em uma dispersão maior dos polos no plano complexo, levando a uma norma \mathcal{H}_∞ menor e indicando um sistema mais robusto.

No caso 4, houve uma melhoria na resposta temporal, especialmente em relação ao tempo de estabelecimento, em comparação com o caso 3. No entanto, isso resultou em uma norma do controlador maior do que no caso 3. A restrição da região de alocação no caso 4 levou a uma degradação da norma \mathcal{H}_∞ em comparação com o caso 3, devido ao raio da circunferência que não permitiu uma região de alocação maior para a minimização da norma \mathcal{H}_∞ .

CONCLUSÃO

Portanto, este trabalho propôs a síntese de um controlador ótimo com custo garantido \mathcal{H}_∞ comparando com um controlador sub-ótimo com restrições LMIs \mathcal{D} -estabilidade.

Os resultados obtidos demonstram que a abordagem de síntese do controlador subótimo possibilita alocar os polos de malha fechada em uma região específica do plano complexo, reduzindo



a norma do controlador, bem como ajustar o tempo de estabelecimento e alcançar a atenuação de ruídos externos ao sistema por meio do critério da norma \mathcal{H}_∞ .

Agradecimentos

Os autores agradecem a Universidade Tecnológica Federal do Paraná e PROPPG (EDITAL PROPPG – 05/2022) pelo suporte financeiro.

Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

- BOYD, Stephen et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia, USA: SIAM, 1994.
- FURTUNATO, Alex F. A.; SALAZAR, Andrés O.; ARAÚJO, Aldayr D. Controlador de velocidade usando modos deslizantes suaves para um motor de indução trifásico. *Revista Controle & Automação*, 2001.
- GAHINET, Pascal et al. The LMI Control Toolbox. In: IEEE. PROCEEDINGS of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista, USA: IEEE, 1994. v. 3, p. 2038–2041.
- LEONHARD, Werner. **Control of Electrical Drives**. Berlin: Springer, 2001.
- LOFBERG, Johan. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE. 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Taipei, Taiwan: IEEE, 2004. P. 284–289.
- NUNES, Willian R. B. M. et al. Síntese de controlador robusto via LMI para o helicóptero 3-DOF. In: CONFERÊNCIA Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações. São José do Rio Preto: SBMAC, 2017. P. 7.
- ORTUNHO, Tiago V. **Projeto de controladores chaveados para acionamento de um motor de indução trifásico**. 2020. Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica – Universidade Estadual Paulista (UNESP).
- ORTUNHO, Tiago Veronese et al. Projeto de Controladores Robustos H Usando LMIs para Controle de um Motor de Indução Trifásico com Incertezas. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, v. 4, n. 1, 2016.
- STURM, Jos F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, Taylor & Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.
- ZHOU, Kemin; DOYLE, John Comstock; GLOVER, Keith et al. **Robust and optimal control**. Upper Saddle River: Prentice Hall New Jersey, 1996. v. 40.