XIII Seminário de Extensão e Inovação
XXVIII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR
Ciência e Tecnologia na era da Inteligência Artificial: Desdobramentos no Ensino Pesquisa e Extensão
20 a 23 de novembro de 2023 - *Campus Ponta Grossa, PR*

SEI-SICITE
2023

Conjuntos Dominantes em Grafos

Dominating Sets in Graphs

André Luis Dopfer[1], André Guerino Castoldi[2]

27/10/2023

RESUMO

Neste trabalho, estudamos os conjuntos dominantes em grafos. A origem da discussão sobre conjuntos dominantes em grafos, inicialmente se deu em problemas utilizando um tabuleiro de xadrez de tamanho $n \times n$. O objetivo é compreender os conjuntos dominantes em grafos e, assim, alcançarmos os primeiros resultados necessários para a compreensão da teoria e das aplicações. Apresenta-se duas aplicações dos conjuntos dominantes em grafos: a dominação da peça dama sobre um tabuleiro de xadrez e os conjuntos de representantes.

PALAVRAS-CHAVE: Conjunto dominante; Conjunto dominante minimal; Teoria dos Grafos.

ABSTRACT

In this paper, we study dominating sets in graphs. The discussion of dominating sets in graphs initially originated in problems using a chessboard of size $n \times n$. The aim is to understand dominating sets in graphs and achieve the first results needed to understand the theory and its applications. Two applications of dominating sets in graphs are presented: dominating queens on a chessboard and sets of representatives.

KEYWORDS: Dominating Set; Minimal dominating set; Graph Theory.

INTRODUÇÃO

A Teoria dos Grafos foi surgiu no século XVIII com o problema das pontes de Königsberg. Esse problema consiste em passar por todas as pontes da cidade e voltar a seu ponto de origem, sem repetir a travessia por nenhuma das pontes. Euler provou que não há solução para esse problema criando o primerio grafo. Dados V um conjunto de vértices e um subconjuto E dos pares não ordenados de V, chamado de conjunto das arestas. Um grafo é constituído de um conjunto de vértices V e de arestas E referentes a esses vértices, usualmente representado por $G(V,E)$.

Neste trabalho, estudamos os conjuntos dominantes em grafos. A origem da discussão sobre conjuntos dominantes em grafos, inicialmente se deu em problemas utilizando um tabuleiro de xadrez de tamanho $n \times n$. Um dos problemas é o de cobertura: o menor número de peças necessárias para cobrir todo um tabuleiro de $n \times n$. Outro problema é o de cobertura independente: O menor número de peças que não se ataquem e cubram todo um tabuleiro $n \times n$. Ao procurarmos o menor número possível de peças necessárias para esses problemas, procuramos encontrar o conjunto dominante minimal.

Os estudos sobre dominação em grafos começaram a ser discutidos aproximadamente em 1862, porém só em 1962 Oystein Ore (ORE, 1967) utilizou pela primera vez o termo "conjunto

[1] Bolsista da Fundação Araucária. Universidade Tecnológica Federal do Paraná , Pato Branco, Paraná, Brasil. E-mail: andredopfer@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 1889921403246689.

[2] Docente do Departamento Acadêmico de Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná , Pato Branco, Paraná, Brasil. E-mail: andrecastoldi@utfpr.edu.br. ID Lattes: 6979785549962936.

dominante". Em 1977, Cockayne e Hedetniemi publicaram o artigo "Towards a theory of domination in graphs"(COCKAYNE; HEDETNIEMI, 1977) com resultados sobre dominação em grafos. Atualmente o estudo de conjuntos dominantes em grafos possui várias aplicações, principalmente na ciência da computação (LU et al., 2010).

Analisando os conceitos básicos da Teoria de Grafos, esta pesquisa tem por objetivo compreender os conjuntos dominantes em grafos e, assim, alcançarmos os primeiros resultados necessários para a compreensão da teoria e das aplicações.

MATERIAIS E MÉTODOS

A construção dos conceitos iniciais da Teoria de Grafos e dos resultados sobre teoria de conjuntos dominantes em grafos foram desenvolvidos por meio de uma revisão bibliográfica. O livro (FEOFILOFF; KOHAYAKAWA; WAKABAYASHI, 2011) foi utilizado para o estudo da Teoria de Grafos e o livro survey (HAYNES; HEDETNIEMI; SLATER, 1998) para os resultados e aplicações de conjuntos dominantes em grafos. Nesta seção, é apresentado alguns conceitos iniciais da Teoria de Grafos, com base nos livros citados acima.

Um **caminho** em um grafo G é uma sequência finita de vértices $v_1, \ldots, v_n$, com todos os vértices sendo distintos entre si, tais que $v_i v_{i+1}$ é uma aresta de G para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Um caminho pode ser representado por $v_1 v_2 v_3 \ldots v_{n-1} v_n$. Um **ciclo** é um caminho com a propriedade que seu último vértice se conecta com o primeiro, ou seja, $v_1 v_2 v_3 \ldots v_{n-1} v_n v_1$.

Um grafo é **conexo** se para qualquer par de vértices v_1 e v_2 existir um caminho ligando v_1 e v_2. Um grafo G_1 é um **subgrafo** de $G = (V,E)$ se $V(G_1) \subseteq V(G)$ e $A(G_1) \subseteq A(G)$. Dado um grafo G, a **distância** entre dois vértices v_1 e v_2 em G é definida como o número de arestas do caminho que liga esses dois vértices, representada por $d = (v,w)$.

Um grafo T é uma **árvore** quando é conexo e não contém ciclos. Dado um grafo G conexo, uma **árvore geradora** é um subgrafo T de G acíclico que possui todos os vértice de G.

A **vizinhança aberta** de um vértice v em um grafo $G = (V,E)$, denotada por $N(v)$, é definida como sendo os vértices que possuem distância igual a 1 a v, ou seja, $N(v) = \{w \in V : d(v,w) = 1\}$ é o conjunto dos vértices w tais que vw é uma aresta. A **vizinhança fechada** de v é $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Se S é um subconjunto de V, define-se $N(S) = \cup_{v \in S} N(v)$ e $N[S] = \cup_{v \in S} N[v]$.

Seja $G = (V,E)$ um grafo. Para $S \subseteq V$, um vértice $v \in S$ é chamado de **enclave** de S se $N[v] \subseteq S$, e $v \in S$. O vértice também pode ser chamado de **isolado** em S se $N(v) \subseteq V - S$. Um conjunto é chamado de **sem enclave** se todos os vértices são isolados.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, é apresentado os resultados sobre conjuntos dominantes em grafos. Tais resultados foram obtidos por Ore (ORE, 1967) e estudados pela referência (HAYNES; HEDETNIEMI; SLATER, 1998).

Definição 1. *Um conjunto $S \subseteq V$ de vértices no grafo $G = (V,E)$ é chamado de* ***conjunto dominante*** *se todo $v \in V$ for um elemento de S ou adjacente a um elemento de V.*

Há várias maneiras de definir um conjunto dominante destacando diferentes aspectos do conceito de dominação. O seguinte resultado mostra esse fato.

Proposição 2. *Um conjunto $S \subseteq V$ de vértices no grafo $G = (V,E)$ é um conjunto dominante se somente se:*

(i) Para todo vértice $v \in V - S$, existe um vértice $u \in S$ tal que v é adjacente a u;

(ii) Para todo vértice $v \in V - S$, tem-se $d(v,S) \leq 1$;

(iii) $N[S] = V$;

(iv) Para todo vértice $v \in V - S$, tem-se $|N(v) \cap S| \geq 1$, ou seja, todo vértice $v \in V - S$ é adjacente a pelo menos um vértice em S;

(v) Para todo vértice $v \in V$, tem-se $|N[v] \cap S| \geq 1$;

(vi) $V - S$ não possui enclave.

Demonstração. $(i) \rightarrow (ii)$ A demonstração é direta, pois se $v \in S$ é adjacente a $u \in V - S \Rightarrow d(u,v) \leq 1 \Rightarrow d(v,S) \leq 1$.

$(ii) \rightarrow (iii)$ Para todo elemento de $v \in V - S$ existe um u tal que $d(v,u) \leq 1$, então $V - S \subset N[S]$. Como $S \subset N[S]$, então $V = S \cup (V - S) \subset N[S]$. Logo, $N[S] = V$.

$(iii) \rightarrow (iv)$ Dado o conjunto S, pela hipótese sabemos que $N[S] = V$. Como todos os elementos de $V - S$ estão em $N[S]$ quer dizer que todos possuem um vizinho em S. Portanto $|N(v) \cap S| \leq 1$.

$(iv) \rightarrow (v)$ Segue da definição de $N[v]$ e da hipótese.

$(v) \rightarrow (i)$ Dado um vértice $v \in V - S$ pela hipótese sabemos que $N[v] \cap S \neq \emptyset$. Logo $\exists\, u \in S$ tal que $d(u,v) \leq 1$. Portanto u e v são adjacentes.

$(i) \rightarrow (vi)$ Vamos provar por absurdo. De fato, $\forall v \in V - S$, $\exists u \in S$ tal que u é adjacente a v e $V - S$ possui enclave. Por definição de enclave, $v \in V - S$ é uma enclave se $N[v] \subseteq V - S$. Então v não possui adjacente em S. Isso é um absurdo.

$(vi) \rightarrow (i)$ Vamos provar por contradição. Suponha que $\exists v \in V - S$, $\forall u \in S$ tal que u não é adjacente a v. Dado o vértice $v \in V - S$, ele não será adjacente a nenhum elemento de S, pois por essa construção de v ele será uma enclave, o que vai contradizer a hipótese. □

Em geral é buscado um conjunto dominante que tenha o menor número de elementos possível. Seja S um conjunto dominante no grafo $G = (V,E)$. Dizemos que S é um **conjunto dominante minimal** se nenhum subconjunto de S é um conjunto dominante de G. O conjunto de todos os conjuntos dominantes minimais de um grafo G é denotado por $MDS(G)$.

Definição 3. *O número de dominação $\gamma(G)$ de um grafo G é igual o mínimo de cardinalidade de um conjunto em $MDS(G)$. O maior número dominante $\Gamma(G)$ igual a cardinalidade máxima de um conjunto minimal em $MDS(G)$.*

Teorema 4. *(HAYNES; HEDETNIEMI; SLATER, 1998, Teorema 1.1) Um conjunto S dominante é um conjunto dominante minimal se e somente se para cada vértice $u \in S$, uma das condições for verdadeira:*

(a) u é isolado em S;

(b) Existe um vértice $v \in V - S$ tal que $N(v) \cap S = \{u\}$.

Demonstração. Dado S sendo um conjunto dominante minimal de G. Para todo vértice $u \in S$, $S - \{u\}$ não é um conjunto dominante. Isso significa que algum vértice v em $V - S \cup \{u\}$ não é dominado por $S - \{u\}$. Agora, tem-se $v = u$, caso u é isolado em S ou $v \in V - S$. Se v não é dominado por $S - \{u\}$, porém dominado por S, então o vértice v é adjacente apenas a u em S, ou seja, $N(v) \cap S = \{u\}$.

Por outro lado, suponha que S é um conjunto dominante e para cada vertice $u \in S$ uma das duas condições iniciais seja verdadeira. Vamos mostrar que S é um conjunto dominante minimal. Suponha que S não é um conjunto dominante minimal, ou seja, existe um vértice $u \in S$ que $S - \{u\}$ é um conjunto dominante. Portanto, u é adjacente a pelo menos um vértice em $S - \{u\}$, ou seja, a condição (a) é falsa. Também se $S - \{u\}$ é um conjunto dominante, então para todo vértice em $V - S$ há um adjacente em $S - \{u\}$, logo, a condição (b) é falsa para u. Por isso nenhuma das condições (a) e (b) é verdadeira, o que contradiz o fato que pelo menos uma das duas seria verdadeira. □

Teorema 5. *(HAYNES; HEDETNIEMI; SLATER, 1998, Teorema 1.2) Todo grafo G conexo de ordem $n \geq 2$ tem um conjunto dominante S onde seu complemento $V - S$ também é um conjunto dominante.*

Demonstração. Seja T uma árvore geradora de G e considere um vértice qualquer u em V. Então todos os outros vértices em T são separados em dois conjuntos diferentes, definidos pela distância deles até u, vamos separá-los entre os que a distância é par e os que tem a distância ímpar, em S e S', respectivamente. Ambos os conjuntos S e $S' = V - S$ são conjuntos dominantes. □

Teorema 6. *(HAYNES; HEDETNIEMI; SLATER, 1998, Teorema 1.3) Se G é um grafo sem vértices isolados, então o complemento $V - S$ de todo conjunto dominante minimal S é um conjunto dominante.*

Demonstração. Dado S um conjunto minimal qualquer de G. Assume que o vértice $v \in S$ não dominado por nenhum vértice em $S - \{u\}$, ou seja, $S - \{u\}$ é um conjunto dominante contradizendo S sendo minimal. Portanto, todo vértice em S é dominado por pelo menos um vértice de $V - S$. Logo $V - S$ é um conjunto dominante. □

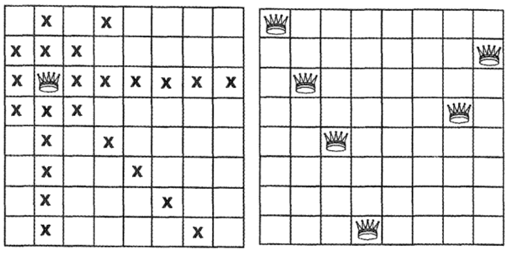
APLICAÇÕES

Através do livro *"Fundamentals of domination in graphs"* (HAYNES; HEDETNIEMI; SLATER, 1998) foram estudadas aplicações de grafos dominantes: a dominação da peça dama sobre um tabuleiro de xadrez e os conjuntos de representantes.

A primeira aplicação é a dominação da peça dama sobre um tabuleiro de xadrez. Esse problema é considerado um dos principais na origem do estudo de grafos dominante, pois através deles, os pesquisadores buscavam saber qual é o menor número de damas para dominar todo o tabuleiro.

Os espaços no tabuleiro dominadas pela dama, são os quadrados em que a peça poderia se movimentar durante um turno. Buscar encontrar o menor número para domitar o tabuleiro, é um problema de encontrar o conjunto dominante minimal. Aproximadamente em 1850 foi descoberto que a quantidade mínima de damas necessárias para dominar todo o tabuleiro 8×8 são 5. Na Fig. 1 temos duas imagens, uma a esquerda mostrando a área que é dominada por uma dama, já a segunda mostra um conjunto dominante no tabuleiro 8×8 de seis damas.

Figura 1 – Dominação da peça dama

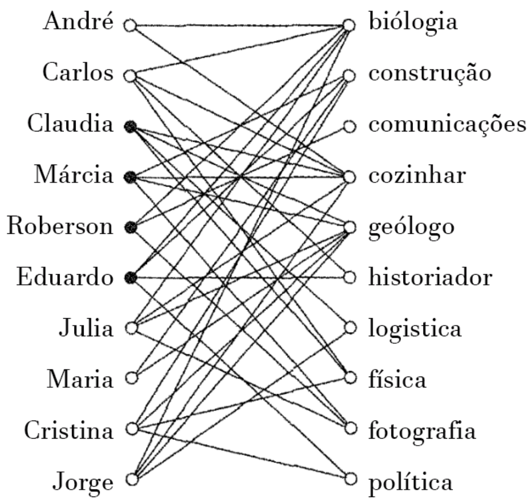


Fonte: (HAYNES; HEDETNIEMI; SLATER, 1998) p. 16

A segunda aplicação é o conjunto de representantes em grafos. Separando um grafo em duas colunas, Pessoas e Habilidades, busca-se encontrar o menor número de pessoas possuindo todas as habilidades para realizar uma tarefa.

Essa estrutura pode ser aplicada a uma expedição. Uma coluna representa os candidatos a participarem do grupo de exploração e a outra as habilidades necessárias para ter sucesso no projeto. O grafo é construído de maneira que todos os candidatos são adjacentes as áreas em que possuem habilidades. Veja a Fig. 2.

Figura 2 – Grupo de exploração



Fonte: Adaptado de (HAYNES; HEDETNIEMI; SLATER, 1998) p. 20

Buscando economizar na mão de obra, foram escolhidos o menor número de participantes que alcançasse todas as habilidades. O conjunto dominante está representado pelas bolinhas fechadas, ou seja, pelo conjunto $S = \{\text{Claudia, Márcia, Roberson, Eduardo}\}$.

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudado os conjuntos dominantes em grafos, sendo importante para as aplicações um conjunto dominante com o menor número de elementos possível. Com os resultados apresentados, temos uma condição necessária e suficiente para que um conjunto dominante seja minimal (Teorema 4) e condicões para que o complementar de um conjunto dominante (minimal ou não) também seja um conjunto dominante (Teoremas 5 e 6). Através dos conceitos e resultados estudados neste trabalho, foi possível desenvolver uma solução para as duas aplicações apresentadas.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Araucária — Brasil (Edital UTFPR-PROPPG n.º 02/2022 — PIBIC-AF).

Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

COCKAYNE, E. J.; HEDETNIEMI, S. T. Towards a theory of domination in graphs. **Networks**, Wiley Online Library, v. 7, n. 3, p. 247–261, 1977.

FEOFILOFF, P.; KOHAYAKAWA, Y.; WAKABAYASHI, Y. **Uma introdução sucinta à teoria dos grafos**. São Paulo, SP, Brasil: [s.n.], 2011. 61 p. Disponível em: .

HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S. T.; SLATER, P. J. **Fundamentals of domination in graphs**. [S.l.]: Marcel Dekker, Inc., New York, 1998. v. 208. (Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics).

LU, G. et al. A survey on exact algorithms for dominating set related problems in arbitrary graphs. **Chinese J. Comput.**, v. 33, n. 6, p. 1073–1087, 2010.

ORE, O. **Theory of graphs**. [S.l.]: American Mathematical Society, Providence, RI, 1967. Vol. 38. (American Mathematical Society Colloquium Publications).