

Análise computacional linear estática e dinâmica de vigas considerando o modelo de solo de Pasternak

Linear static and dynamic computational analysis of beams considering the Pasternak soil model

Ana Laura Ravalho Pascotto¹, Eduardo de Pizzol Pavan², Luiz Antonio Farani de Souza³

RESUMO

A análise de vibração de vigas sobre fundação elástica é necessária para um projeto ideal em muitas aplicações de engenharia. Este trabalho apresenta um modelo numérico-computacional de Elementos Finitos para análise linear estática e dinâmica de vigas considerando a interação solo-estrutura. O solo é idealizado como fundação contínua por meio do modelo de Pasternak e o contato entre os meios é bilateral. Um código computacional é desenvolvido com o programa livre Scilab. A equação do movimento é solucionada pelo método implícito de Newmark - Aceleração Média Constante. A abordagem numérica mostra-se apropriada para as análises lineares estática e dinâmica, uma vez que utiliza expressões matriciais relativamente simples. Exemplos numéricos de problemas de vigas encontrados na literatura são estudados. Os resultados mostram que a presença da fundação aumenta a rigidez do sistema estrutural, influenciando no seu comportamento estrutural. Além disso, o efeito do amortecimento na estrutura, na análise dinâmica, causa a diminuição dos picos do deslocamento na mesma, levando à estrutura de um estado vibratório para um estado em repouso.

PALAVRAS-CHAVE: análise dinâmica; amortecimento; interação solo-estrutura.

ABSTRACT

Vibration analysis of beams on elastic foundations is necessary for optimal design in many engineering applications. This work presents a numerical-computational model of Finite Elements for static and dynamic linear analysis of beams considering the soil-structure interaction. The soil is idealized as a continuous foundation using the Pasternak model and the contact between the media is bilateral. A computational code is developed with the open source Scilab program. The equation of motion is solved by Newmark's implicit method - Constant Average Acceleration. The numerical approach is appropriate for linear static and dynamic analyses, as it uses relatively simple matrix expressions. Numerical examples of beam problems found in the literature are studied. The results show that the presence of the foundation increases the rigidity of the structural system, influencing its structural behavior. Furthermore, the effect of damping on the structure, in the dynamic analysis, causes a reduction in displacement peaks in the same, taking the structure from a vibrating state to a state at rest.

KEYWORDS: dynamic analysis; damping; soil-structure interaction.

INTRODUÇÃO

Com o avanço da tecnologia e da construção civil, estruturas esbeltas e com a possibilidade de vencer vãos cada vez maiores são projetadas. Em decorrência disso, essas estruturas tornam-se mais susceptíveis a problemas excessivos de vibrações, tais como ressonância, batimento, entre outros. Nessa conjuntura, a análise estrutural

¹ Bolsista do PIBIC CNPq — CNPQ / Bolsa Iniciação científica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: analaurapascotto@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1376429716912723>.

² Voluntário da UTFPR / Trabalho Voluntário. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: eduardopavan@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: <http://lattes.cnpq.br/2346045120679425>.

³ Docente no Curso de Engenharia Civil. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: lasouza@utfpr.edu.br. ID Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0388431681382591>.



dinâmica, além da estática, passa também a ser importante no que diz respeito à concepção de um projeto estrutural (Rosas; Silva; Silveira, 2018). As fundações desempenham um papel fundamental na preservação do sistema estrutural sob oscilações. Dependendo das aplicações do sistema estrutural considerado, os pesquisadores propuseram diversos tipos de modelagens para as fundações. O primeiro e mais simples é o modelo elástico linear de Winkler. Esse modelo de fundação, descrito por um único parâmetro, baseia-se na hipótese de que a reação num ponto é proporcional ao deslocamento do mesmo, e as molas são lineares e independentes entre si. Um dos modelos de fundação com dois parâmetros é o modelo de Pasternak, em que as molas são conectadas por uma camada incompressível que se deforma apenas sob tensões de cisalhamento (Rosas; Silva; Silveira, 2018; Younesian et al., 2019). Posto isso, este trabalho tem por escopo apresentar um modelo numérico-computacional para análise linear estática e dinâmica de vigas considerando a interação solo-estrutura. As estruturas são discretizadas pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli. O solo é idealizado como fundação contínua por meio do modelo de Pasternak. A interação solo-estrutura é tratada como bilateral, a qual considera que o solo reage tanto às solicitações de tração quanto às de compressão, não havendo assim perda de contato. Os problemas dinâmicos transientes são resolvidos por intermédio do método implícito de Newmark (Aceleração Média Constante). O código computacional desenvolvido com o programa livre Scilab, versão 2023.1.0 (Scilab, 2023), é aplicado em problemas de vigas sem e com fundação encontrados na literatura.

MATERIAIS E MÉTODOS

O modelo de Winkler apresenta apenas um parâmetro definindo a propriedade do solo. Esse modelo representa a região de contato por meio de molas estreitamente espaçadas e independentes entre si. Essa teoria conduz a mesma resposta da mola tanto na tração quanto na compressão (Younesian et al., 2019). A matriz de rigidez da base \mathbf{K}_{b1} para o elemento finito é dada por (Teodoru; Muşat, 2008):

$$\mathbf{K}_{b1} = \frac{k_{s1}L}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sim.} & & & 156 & -22L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

na qual L é o comprimento de viga. O modelo de Pasternak considera dois parâmetros (k_{s1} e k_{s2}) para o comportamento do solo. Esse modelo supõe que as molas são conectadas por uma camada incompressível que se deforma apenas por tensões de cisalhamento (Rosas; Silva; Silveira, 2018). A matriz de rigidez elementar do modelo de Pasternak é dada por (Teodoru; Muşat, 2008):

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{K}_{b1} + \mathbf{K}_{b2}, \quad (2)$$

sendo a matriz \mathbf{K}_{b1} dada pela Equação (1) e \mathbf{K}_{b2} por:

$$\mathbf{K}_{b2} = \frac{k_{s2}}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 36 & 3L & 0 & -36 & 3L \\ & & 4L^2 & 0 & -3L & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{Sim.} & & & 36 & -3L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$



em que k_{s2} representa o parâmetro de rigidez cisalhante da camada do modelo de Pasternak. Considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli, a matriz de rigidez elementar do elemento de viga-pilar no sistema de coordenadas locais é dada por:

$$\mathbf{K}_M = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 12c_1 & 6c_2 & 0 & -12c_1 & 6c_2 \\ 0 & 6c_2 & 4I & 0 & -6c_2 & 2I \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -12c_1 & -6c_2 & 0 & 12c_1 & -6c_2 \\ 0 & 6c_2 & 2I & 0 & -6c_2 & 4I \end{bmatrix}, \quad (4)$$

em que $c_1 = I/L^2$ e $c_2 = I/L$. Na Equação (4), E é o módulo de elasticidade longitudinal, I é o momento de inércia e A é área da seção transversal. Na teoria clássica de Euler-Bernoulli, os planos normais ao eixo neutro da viga permanecem retos e normais após a deformação (Avramidis; Morfidis, 2006). A matriz de rigidez do elemento finito de viga-pilar com base elástica considerando o modelo de Pasternak é descrita por:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_b. \quad (5)$$

Se $k_{s2} = 0$, a matriz \mathbf{K} recai no modelo de Winkler, visto que $\mathbf{K}_{b2} = \mathbf{0}$. A equação diferencial ordinária de segunda ordem que governa a resposta dinâmica de um sistema estrutural em termos dos deslocamentos nodais é dada por (Souza, 2023):

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}(t)) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{F}_{ext}(t) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

sendo \mathbf{F}_{int} o vetor de forças internas, \mathbf{u} o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{C} a matriz de amortecimento, \mathbf{M} a matriz de massa, $\dot{\mathbf{u}}$ o vetor de velocidade, $\ddot{\mathbf{u}}$ o vetor de aceleração e \mathbf{F}_{ext} o vetor forças externas aplicadas em função do tempo t . A solução aproximada do sistema dado em Equação (6), cujas incógnitas são $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{u}}(t)$, é obtida por um esquema de integração numérica. O método implícito mais amplamente utilizado para dinâmica estrutural é o método de Newmark. Para iniciar o método Newmark, o vetor $\ddot{\mathbf{u}}(0)$ em $t = 0$ deve ser calculado como:

$$\ddot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{F}_{ext}(0) - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(0) - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}(0))]. \quad (7)$$

Para o instante de tempo atual ($t + \Delta t$), as expressões de Newmark para o deslocamento \mathbf{u} e a velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ são dadas por, respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta t \quad {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \quad {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \beta \quad {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \right], \quad (8)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t (1 - \gamma) \quad {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \Delta t \gamma \quad {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}, \quad (9)$$

em que β e γ são constantes referentes ao método de Newmark e Δt é o intervalo de tempo. Um modelo bastante simples e recorrente com relação à matriz de massa refere-se ao elemento em que toda massa é transferida diretamente para os seus nós, resultando em uma matriz diagonal, conhecida como matriz de massa condensada (\mathbf{M}_{con}). Essa matriz é descrita pela seguinte equação (Le; Battini; Hjiáj, 2011):

$$\mathbf{M}_{con} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{m} \end{bmatrix}, \text{ sendo } \mathbf{m} = \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L^2/12 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

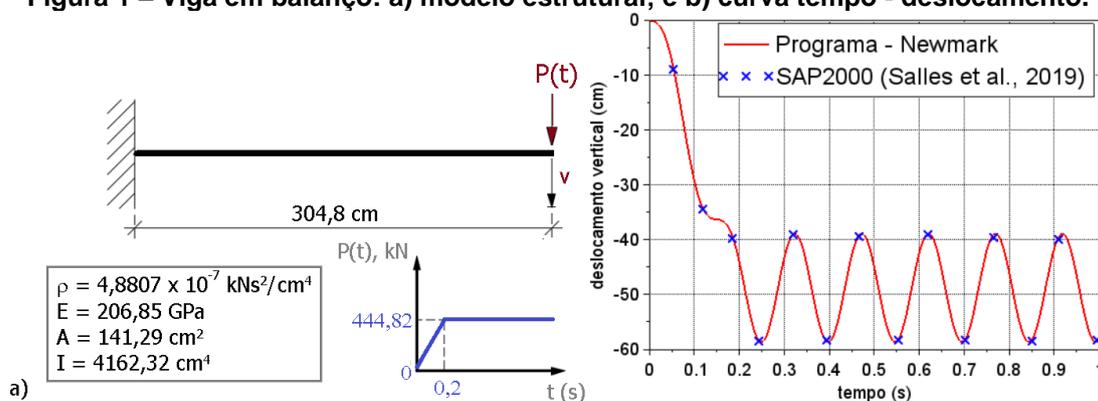
em que $\mathbf{0}_3$ é a matriz nula de ordem 3 e ρ é a densidade do material. A matriz de amortecimento \mathbf{C} de um elemento é considerada neste trabalho proporcional à massa, sendo definida em função da matriz de massa \mathbf{M} e do coeficiente de amortecimento c_m de acordo com a seguinte expressão:

$$\mathbf{C} = 2c_m \mathbf{M}. \quad (11)$$

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O primeiro exemplo numérico consiste de uma viga em balanço sujeita a uma força dinâmica $P(t)$ aplicada na extremidade livre da mesma, conforme a Figura 1a. Esse problema foi investigado por Salles et al. (2019). A viga é discretizada por 40 elementos finitos de viga-pilar. Considera-se na análise transiente um incremento de tempo $\Delta t = 0,002$ s e tempo total $t = 1$ s. Os parâmetros do método de Newmark são $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ (Aceleração Média Constante). A resposta dinâmica (curva tempo – deslocamento vertical v) obtida com o programa implementado apresenta boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Salles et al. (2019), conforme a Figura 1b. Pode-se notar um comportamento oscilatório regular quanto à amplitude e período de oscilação a partir do instante 0,2 segundos, que se mantém até o final da análise.

Figura 1 – Viga em balanço: a) modelo estrutural; e b) curva tempo - deslocamento.

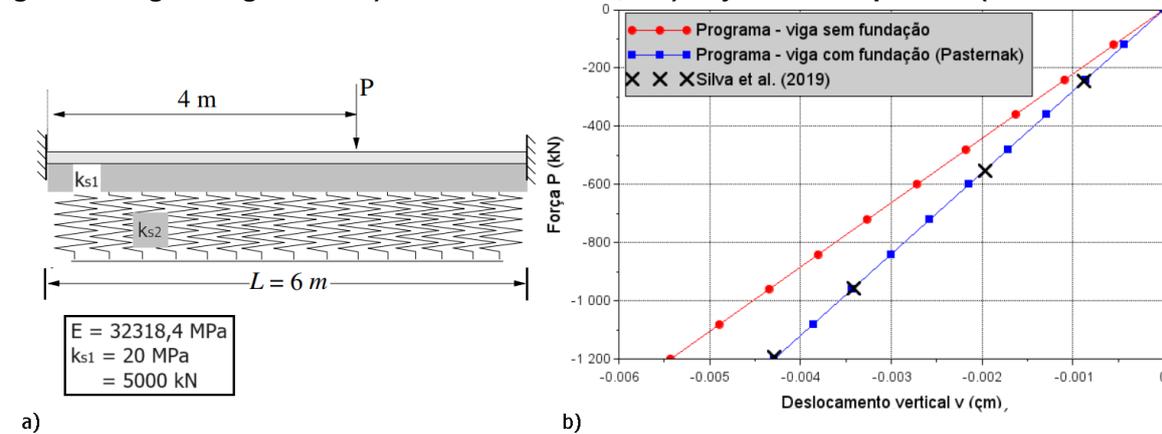


a) Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

O segundo exemplo numérico trata-se de uma viga biengastada apoiada em uma fundação do tipo Pasternak submetida a uma força concentrada $P = 1200$ kN, conforme a Figura 2a. A estrutura tem seção transversal retangular com base $b = 0,30$ m e altura $h = 0,60$ m. A viga é discretizada por 30 elementos finitos de viga-pilar. Os parâmetros do modelo de solo são $k_{s1} = 20$ MPa e $k_{s2} = 5000$ kN e considera-se a restrição bilateral. Vê-se a boa concordância na Figura 2b entre a trajetória de equilíbrio (curva deslocamento vertical no ponto de aplicação da força *versus* força) com os pontos de equilíbrio apresentados por Silva, Silveira e Lemes (2019). O solo trabalha integralmente conectado à viga, uma vez que a região de contato entre os corpos é conhecida *à priori*, e não há perda de contato (contato bilateral). O modelo de Pasternak simula o comportamento do solo estabelecendo certa interação entre as molas usadas no modelo de Winkler, com a introdução de um parâmetro de rigidez adicional (k_{s2}). Assim, o segundo parâmetro do modelo de Pasternak torna o sistema estrutural mais rígido. Quanto maior o seu valor, menores são os deslocamentos provocados na estrutura. A terceira simulação numérica consiste da viga biengastada sobre base elástica apresentada na Figura 2a submetida à ação de uma carga dinâmica constante $P(t) = -1200$ kN. Consideram-se os seguintes parâmetros na análise dinâmica transiente: $\rho = 2,4$ kg/m³, $c_m = 22$, $\Delta t = 5,0 \times 10^{-5}$ s e $t = 0,5$ s. A Figura 3 apresenta a curva tempo *versus* deslocamento vertical da viga com e sem o efeito do amortecimento. O amortecimento provoca a diminuição dos picos do deslocamento na estrutura, visto que o amortecimento consiste na transformação da energia dissipada para outra forma de energia e, conseqüentemente, a redução de energia do sistema de vibração (Rosas; Silva;

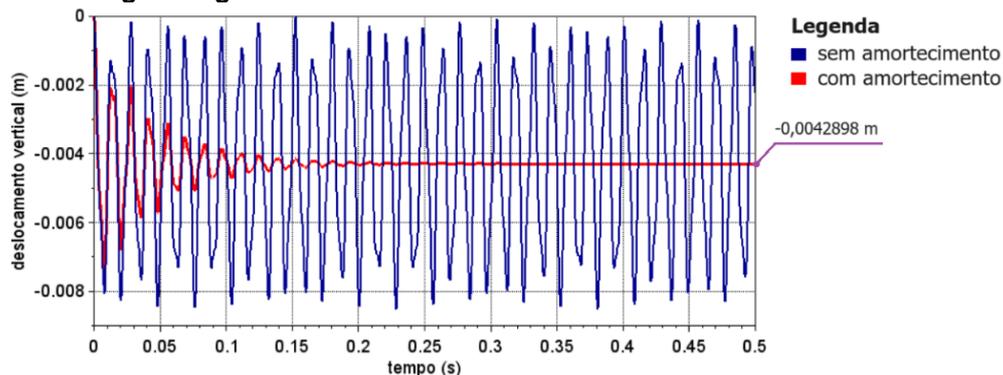
Silveira, 2018). Nota-se que os deslocamentos obtidos na análise dinâmica ao longo do tempo convergem para o deslocamento obtido na análise estática ($v = -0,0042898$ m).

Figura 2 – Viga biengastada: a) modelo estrutural; e b) trajetória de equilíbrio (análise estática).



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

Figura 3 – Viga biengastada: análise dinâmica considerando ou não o amortecimento.



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

CONCLUSÃO

Neste trabalho um modelo computacional de elementos finitos para análise linear estática e dinâmica de vigas sobre a fundação de Pasternak e considerando a teoria de viga de Euler-Bernoulli foi apresentado. Os resultados numéricos obtidos com o código computacional desenvolvido com o programa Scilab foram validados com os resultados obtidos por outros pesquisadores. O modelo de fundação de Pasternak, descrito por dois parâmetros, é mais preciso do que o modelo de Winkler. Contudo, uma das dificuldades do modelo de Pasternak consiste em relacionar os parâmetros do mesmo com os do solo. A consideração da interação solo-estrutura na análise dinâmica torna o sistema mais rígido, o que ocasiona o aumento das frequências naturais. Os resultados da viga biengastada mostraram que o amortecimento estrutural, que é uma medida de dissipação de energia, conduziu a estrutura de um estado vibratório para um estado em repouso. A dissipação de energia é um fenômeno complexo devido aos inúmeros aspectos que influenciam sua quantificação. Por fim, a abordagem numérica aproximada, baseada no MEF, mostrou-se apropriada para as análises lineares estática e dinâmica, uma vez que utiliza expressões matriciais relativamente simples.



Agradecimentos

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPQ pelo apoio financeiro (PIBIC CNPq — CNPQ/Bolsa Iniciação científica).

Conflito de interesse

Os autores declaram que não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

AVRAMIDIS, I. E.; MORFIDIS, Konstantinos. Bending of beams on three-parameter elastic foundation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 2, p. 357-375, 2006.

LE, T.-N.; BATTINI, J.-M.; HJIAJ, M. Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams. **Computational Mechanics**, v. 48, p. 153-161, 2011.

ROSAS, L. R. B.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. Nonlinear dynamic analysis of structures in contact with soil. **Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing.**, v. 34, n. 1, p. 1-14, 2018.

SCILAB, versão 2023.1.0. Dassault Systèmes, Vélizy-Villacoublay, France, 2023.

SALLES, M. C. S. P.; VIANA, HARLEY F.; SILVA, R. G. L.; LAVALL, A. C. C.; COSTA, R. S. Geometrically nonlinear transient analysis of plane steel frames using a corotational updated lagrangian formulation. In: XL Ibero-Latin-American Congress on computational Methods in Engineering, ABMEC, Natal/RN, Brazil, November 11-14, 2019. **Proceedings...** Natal: ABMEC, 2019.

SILVA, J. L.; SILVEIRA, S. R. A. M.; LEMES, Í. J. M. Numerical simulation of the nonlinear soil-structure interaction problem. In: XL Ibero-Latin-American Congress on computational Methods in Engineering, ABMEC, Natal/RN, Brazil, November 11-14, 2019. **Proceedings...** Natal: ABMEC, 2019.

SOUZA, L. A. F. Análise dinâmica não linear de vigas por meio da formulação corrotacional do MEF. **Revista de Engenharia e Tecnologia**, v. 15, n. 1, 2023.

TEODORU, I. B.; MUSAT, V. Beam elements on linear variable two-parameter elastic foundation. **Buletinul Institutului Politehnic din Iasi. Sectia Constructii, Arhitectura**, v. 54, n. 2, p. 69, 2008.

YOUNESIAN, D.; HOSSEINKHANI, A.; ASKARI, H.; ESMAILZADEH, E. Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications. **Nonlinear Dynamics**, v. 97, n. 1, p. 853-895, 2019.