



Modelagem no domínio do tempo e solução no domínio da frequência de circuito passivo chaveado de três malhas

Modeling on time domain and solution on the frequency domain of passive switched three-mesh circuit

Nicholas Seifert¹, Flávio Luiz Rossini²

RESUMO

Este trabalho apresentou a análise matemática de um circuito elétrico que contém, acoplados, resistores, indutores e capacitores, na premissa de validar a eficiência da Transformada de Laplace, esta, uma ferramenta aplicável em variados sistemas físicos. Neste processo, utilizou-se o Método das Malhas para obterem-se as equações simbólicas e empregaram-se os softwares *MATLAB*® e *MULTISIM*®, para simulação do circuito e sobreposição de curvas de comportamento das correntes elétricas, respectivamente. Com os dados obtidos tanto numericamente (a partir do *MULTISIM*®), quanto algebricamente, foi vista uma precisão superior a 99%, tanto na a etapa de carga (na qual o circuito é alimentado por uma fonte) quanto na etapa de descarga (na qual a fonte é desconectada). A precisão foi visualizada a partir da confecção de um gráfico, montado no *MATLAB*®, do comportamento de regime transitório do sistema. Assim, visualizou-se, como se desejava, que a Transformada de Laplace é um artifício simplificador de cálculos.

PALAVRAS-CHAVE: Modelagem no tempo, simulação no *MULTISIM*® e *MATLAB*®, solução na frequência

ABSTRACT

This work presented the mathematical analysis of an electrical circuit that contains coupled resistors, inductors and capacitors, on the premise of validating the efficiency of the Laplace Transform, a tool applicable in various physical systems. In this process, the Mesh Method was used to obtain the symbolic equations and the software *MATLAB*® and *MULTISIM*® were used to simulate the circuit and superimpose electrical current behavior curves, respectively. With the data obtained both numerically (from *MULTISIM*®) and algebraically, an accuracy greater than 99% was seen, both in the charging stage (in which the circuit is powered by a source) and in the discharging stage (in the which source is disconnected). Accuracy was visualized by creating a graph, created in *MATLAB*®, of the system's transient regime behavior. Thus, it was seen, as desired, that the Laplace Transform is a calculation simplification device.

KEYWORDS: Modeling in time, simulation in *MULTISIM*® and *MATLAB*®, solution in frequency.

1 Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: nicholasseifert@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 0210321794204517.

2 Docente no DAELN - Departamento Acadêmico de Eletrônica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: frossini@utfpr.edu.br. ID Lattes: 8616413126997528



INTRODUÇÃO

Circuitos elétricos e acoplamentos mecânicos, são sistemas físicos descritos a partir de equações diferenciais, modelados a partir de sistemas lineares [2]. Apesar disso, a resolução de tais equações, em sua essência, é recursiva e extensa. Diante deste problema, desenvolveram-se ferramentas para a simplificação da álgebra envolvida. O cálculo de variáveis complexas surgiu como eficaz artifício na premissa de resolver uma série de problemas de modelagem [3]. Neste trabalho, mostrou-se como a Transformada de Laplace é utilizada na análise de sistemas lineares no tempo contínuo [1],[4],[7].

Os circuitos RLC, são assim chamados, pois neles são acoplados resistores, indutores e capacitores de acordo com dada lógica combinacional em ramos que compõe malhas [6]. Para a análise do circuito da Figura (2), utilizou-se como estímulo um sinal tensão contínua, constante e positiva. Empregou-se três resistores, com os valores de 12 Ω , 6 Ω e 40 Ω , respectivamente, um indutor de 3 H e um capacitor de 37.03 mF. O método de análise empregado foi o das malhas, utilizando a Lei de Kirchhoff das Tensões [6].

Além dos circuitos elétricos, a transformada de Laplace é aplicável aos sistemas mecânicos, que possuem massa, mola e amortecedores, aos sistemas eletromecânicos, que convertem sinais elétricos a impulsos dinâmicos [4]. Em síntese, as aplicações são diversas.

Na seção I apresentou-se um resumo sobre a obra, na seção II introduziu-se a análise do sistema, na seção III aprofundou-se nas teorias matemáticas necessárias para a modelagem e exibiram-se os cálculos realizados, na seção IV mostrou-se o resultado final, comparando os resultados do MATLAB® e MULTISIM® da análise

MATERIAIS E MÉTODOS

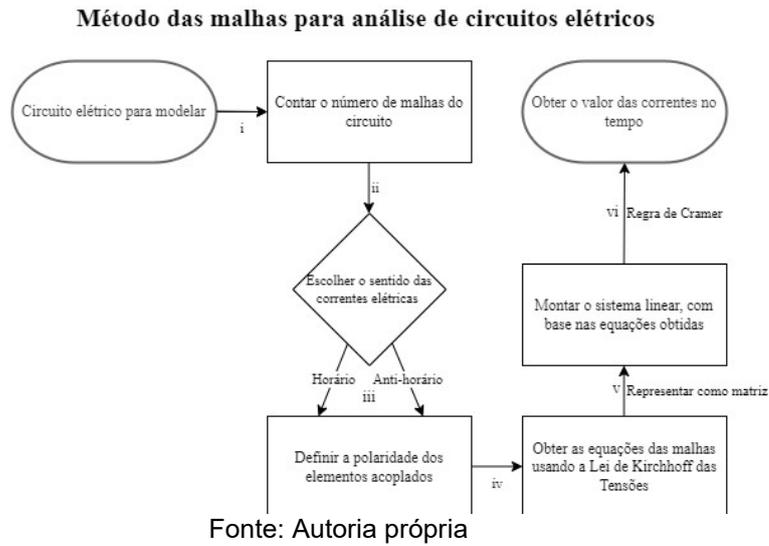
Nesta seção, foi apresentado o método utilizado para resolver, na forma de sistema linear, qualquer circuito elétrico analógico, além da resolução do sistema elétrico.

Dado um sistema quadrado qualquer, escrito na notação matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1 1} & \cdots & a_{n_1 n_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ \vdots \\ i_{n_1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_{n_1}(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

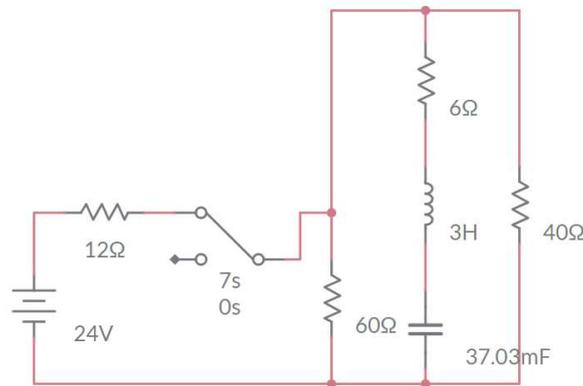
Sendo $i_1(t), \dots, i_{n_1}(t)$ as entradas do sistema, $a_{11}, \dots, a_{n_1 n_1}$ coeficientes do sistema, e $v_1(t), \dots, v_{n_1}(t)$ as saídas do sistema, em função do tempo t , com n_1 uma constante inteira positiva. Neste trabalho, representaram-se as entradas como correntes elétricas e as saídas como tensões elétricas, ambas em função do tempo t . Obteve-se o valor das correntes, dadas as tensões, com a Regra de Cramer. A Regra enuncia que as variáveis de entrada do sistema são obtidas a partir da razão entre o determinante da matriz da variável pelo determinante da matriz do sistema [1].

Figura 1 - Fluxograma de resolução



A partir da Figura (1), ilustrou-se a sequência de tarefas necessárias para obter o comportamento de qualquer circuito elétrico analógico, pelo método das malhas. Este procedimento foi utilizado nesta obra, para obter as correntes do circuito da Figura (2).

Figura 2 - Circuito elétrico RLC chaveado de três malhas



Fonte: Autoria própria

Aplicou-se, da Figura (1), no circuito representado pela Figura (2), o Método das Malhas, considerou-se o sentido da corrente como horário. Aplicou-se a transformada de Laplace na Eq. (3).

$$\begin{bmatrix} 72 & -60 & 0 \\ -60 & \frac{27}{s} + 66 + 3s & -\frac{27}{s} - 6 - 3s \\ 0 & -\frac{27}{s} - 6 - 3s & \frac{27}{s} + 46 + 3s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{1c}(s) \\ I_{2c}(s) \\ I_{3c}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24}{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$



Sendo $I_{1c}(s)$, $I_{2c}(s)$ e $I_{3c}(s)$ as correntes elétricas nas malhas a esquerda, central e da direita, respectivamente, na etapa de carga em função da frequência complexa s . Obteve-se as correntes do sistema, a partir da Regra de Cramer, além disso, utilizou-se a função *residue* do MATLAB®, para extrair as frações parciais:

$$I_{1c}(s) = \frac{72s^2 + 720s + 648}{108s^3 + 504s^2 + 972s} = \frac{-0,94j}{s + 2,33 - 1,88j} + \frac{+0,94j}{s + 2,33 + 1,88j} + \frac{2}{3s} \quad (3)$$

$$I_{2c}(s) = \frac{432s^2 + 6624s + 3888}{1080s^3 + 5040s^2 + 9720s} = \frac{-1,13j}{s + 2,33 - 1,88j} + \frac{+1,13j}{s + 2,33 + 1,88j} + \frac{2}{5s} \quad (4)$$

$$I_{3c}(s) = \frac{432s^2 + 864s + 3888}{1080s^3 + 5040s^2 + 9720s} = \frac{0,28j}{s + 2,33 - 1,88j} + \frac{-0,28j}{s + 2,33 + 1,88j} + \frac{2}{5s} \quad (5)$$

Aplicou-se novamente o Método das Malhas, mas para a etapa de descarga. Além disso, levantou-se a condição inicial do indutor e do capacitor.

$$\begin{bmatrix} \frac{27}{s} + 66 + 3s & -\frac{27}{s} - 6 - 3s \\ -\frac{27}{s} - 6 - 3s & \frac{27}{s} + 46 + 3s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2d}(s) \\ I_{3d}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ \frac{16}{s} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Sendo $I_{2d}(s)$ e $I_{3d}(s)$ as correntes elétricas das malhas do meio e da direita, respectivamente, na fase de descarga, em função da frequência complexa s . Utilizou-se a Regra de Cramer para obter a expressão das correntes e aplicou-se a função *residue* do matlab

$$I_{2d}(s) = \frac{-64}{30s^2 + 300s + 270} = \frac{0,26}{s + 9} - \frac{0,26}{s + 1} \quad (7)$$

$$I_{3d}(s) = \frac{96}{30s^2 + 300s + 270} = \frac{-0,4}{s + 9} + \frac{0,4}{s + 1} \quad (8)$$

Aplicou-se a Transformada inversa de Laplace, além disso, deslocou-se os resultados das Eqs. (9-10) sete unidades no tempo, no instante no qual a chave é aberta. Em síntese, a equação das correntes $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$:



$$i_1(t) \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ \left(\frac{2}{3} + 1,88e^{-2,33t} \text{sen}(1,88t)\right) u(t), 0 \leq t \leq 7 \\ 0, t > 7 \end{cases} \quad (9)$$

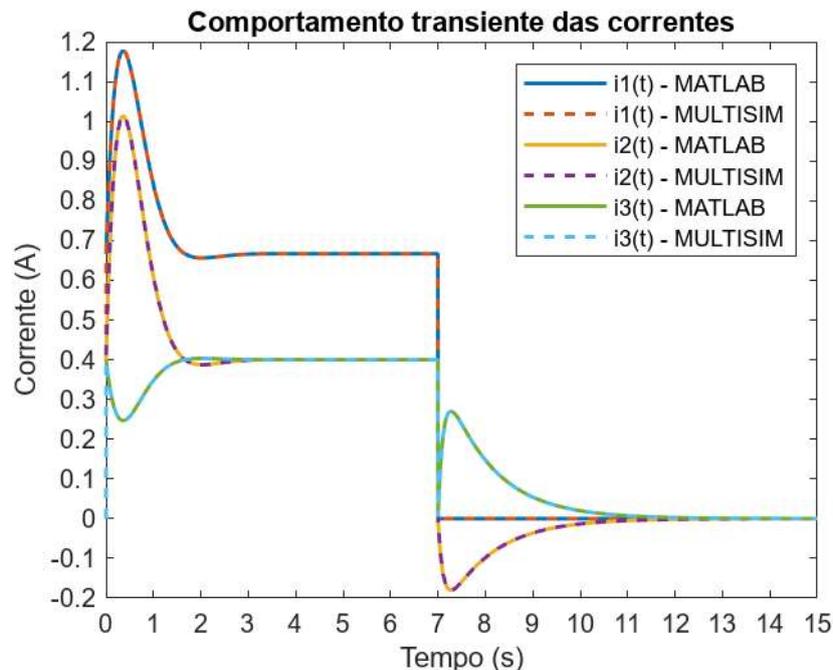
$$i_2(t) \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ \left(\frac{2}{5} + 2,26e^{-2,33t} \text{sen}(1,88t)\right) u(t), 0 \leq t \leq 7s \\ 0,26(e^{-9t+63} - e^{-t+7})u(t-7), t > 7s \end{cases} \quad (10)$$

$$i_3(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ \left(\frac{2}{5} - 0,56e^{-2,33t} \text{sen}(1,88t)\right) u(t), 0 \leq t \leq 7s \\ 0,4(e^{-9t+63} - e^{-t+7})u(t-7), t > 7s \end{cases} \quad (11)$$

RESULTADOS E CONCLUSÃO

A Figura (3) exibe o comportamento transiente e permanente das correntes em cada malha do circuito ilustrado na Figura (2), além de estabelecer uma comparação entre os valores obtidos no simulador MULTISIM® e os valores obtidos pela modelagem do sistema no MATLAB®, constata-se de um erro inferior a 1%. Conclui-se que a Transformada de Laplace se firma como uma eficaz ferramenta para análise de sistemas lineares no tempo, importante para o estudo de circuitos elétricos e diversos outros sistemas físicos.

Figura 3 - Sinais de corrente elétrica do circuito



Fonte: Autoria própria



Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

- [1] DONDA, Rafael Angelini; GARCIA, Renato Vinicius; ROSSINI, Flávio Luiz; SOUZA, Reginaldo Nunes de. Desenvolvimento do aplicativo métodos de matemática aplicada – simulador da série de fourier (mma-ssf): estudo de caso. In: ROSSINI, Flávio Luiz et al. Open science research II. [S. l.]: Editora Científica Digital, 2022. p. 1360-1369. Disponível em: <https://doi.org/10.37885/220207807>. Acesso em: 14 set. 2023.
- [2] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 4:** sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 5. ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [3] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar, 6:** complexos, polinômios e equações. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- [4] LATHI, B. P. **Sinais e sistemas lineares.** 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.
- [5] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de física básica, v. 3: eletromagnetismo.** 3. ed. São Paulo: Blucher, 2015.
- [6] SADIKU, Matthew N.O. **Análise de circuitos elétricos com aplicações.** 5. ed. Porto Alegre: Amgh, 2014.
- [7] SILVA, Victor Augusto da; OLIVEIRA, Luan; SEIFERT, Nicholas; OLIVEIRA, João Matheus Simm de; PONTIM, Flávia Macedo; ROSSINI, Flávio Luiz. Modelagem no domínio do tempo e aplicação da transformada de laplace na solução e análise de um circuitos rlc com três malhas. In: SILVA, Victor Augusto da et al. Cidades inteligentes e novos modelos industriais. 2. ed. [S. l.]: Ampla Editora, 2023. p. 62-84. ISBN 9786553811324. Disponível em: <https://doi.org/10.51859/ampla.cin3224-5>. Acesso em: 14 set. 2023
- [8] ZILL; G., Dennis. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem.** 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.