SISTEMAS NÃO HERMITIANOS COM SIMETRIA PARIDADE TEMPO

NON-HERMITIAN SYSTEMS WITH TIME PARITY SYMMETRY

julio cezar vieira [1], Antonio Carlos Amaro de Faria Jr[2]

RESUMO

O presente trabalho é uma investigação computacional de sistemas não-hermitianos. A investigação de sistemas não-hermitianos ganhou destaque após o trabalho de Bender. Nesse trabalho, ele conjeturou que onde tais sistemas não-hermitianos com simetria *PT* exibem auto energias reais, Ahmed obteve novas soluções para potenciais inédito, através de um algoritmo no mathematica obtivemos o gráfico dessas solução e analisamos ela . Musslimani generalizou esse conceito para o campo da óptica utilizando semelhanças matemáticas entre a equação de onda eletromagnética na aproximação paraxial e a equação de Schrödinger. Assim, analisando sistemas ópticos no regime não linear e mostrando que a equação de Schrödinger não linear possui soluções do tipo solitons estáveis em 1 e 2 dimensões. Esses tipos de sistemas são interessantes uma vez que os pulsos ópticos têm perdas mínimas de energia. Outra característica da aplicação desses sistemas é na supressão de ruídos em comunicações, transmissão de sinal e processamento de informações e tecnologias baseadas em fibra óptica. Para o estudo desses sistemas neste trabalho, foi desenvolvido um código no software Mathematica, capaz de gerar estrutura de banda para diversas redes ópticas. Com esse código, eu obtive estrutura de banda para 3 potenciais diferentes e discuti elas.
PALAVRAS-CHAVE: equação não linear de Schorediger, fibra óptica, sistemas não-hermitianos

ABSTRACT

The present work is a computational investigation of non-Hermitian systems. The investigation of non-Hermitian systems gained prominence after Bender's work. In this work, he conjectured that where such non-Hermitian systems with PT symmetry exhibit real eigenvalues, Ahmed obtained new solutions for unprecedented potentials. Through an algorithm in Mathematica, we generated graphs of these solutions and analyzed them. Musslimani extended this concept to the field of optics by utilizing mathematical similarities between the electromagnetic wave equation in the paraxial approximation and the Schrödinger equation. Thus, by analyzing optical systems in the nonlinear regime, we showed that the nonlinear Schrödinger equation has stable soliton-type solutions in 1 and 2 dimensions. These types of systems are interesting since optical pulses have minimal energy losses. Another application of these systems is in noise suppression in communications, signal transmission, and information processing, as well as technologies that use optical fibers. To study these systems in this work, we developed code in the Mathematica software that generates band structures for various optical networks. With this code, we obtained band structures for two different potentials and discussed them.
KEYWORDS: non-Hermitian sytem, nonlinear schorediger equation, Optical fiber

INTRODUÇÃO

A mecânica quântica exige que todos os observáveis físicos sejam associados a um espectro real e hermitiano associado a um determinado sistema. No caso do operador Hamiltoniano Hermitiano, esses axiomas implicam que as auto-energias correspondentes do sistema, sejam reais e que exista conservação da probabilidade. Nos últimos anos, uma série de trabalhos demonstrou que mesmos sistemas não-Hermitianos podem

[1] Julio Cezar Vieira Bolsista da fundação araucária, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil e-mail:julio.vieira@alunos.utfpr.edu.br, ID Lattes: 6425118150112355 .

[2] Antonio Carlos Amaro de Faria Júnior Docente no programa de pôs graduação em física e astronomia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil, e-mail: antonioc@utfpr.edu.br ID lattes: 3414863900455895.

apresentar um espectro de energia real, desde que estes sistemas apresentem simetria de paridade e tempo (*PT*) [1].

Em geral, a ação do operador de paridade é definida pelas relações

$$P:\hat{x} \rightarrow -\hat{x}, \hat{p} \rightarrow -\hat{p} \tag{1}$$

E o operador de reversão temporal é definido pelas relações

$$\hat{T}:\hat{x} \rightarrow \hat{x}, \hat{p} \rightarrow -\hat{p}, i \rightarrow -i. \tag{2}$$

O operador Hamiltoniano, que descreve a evolução temporal de um sistema, é dado pela seguinte expressão

$$\hat{H}=\frac{\widehat{p^2}}{2}+V(x), \tag{3}$$

onde $V(x)$ é um potencial que pode ser uma função complexa. Designamos $V^*(x)$ como sendo o complexo conjugado do potencial complexo $V(x)$. A ação dos operadores paridade e reversão temporal no operador Hamiltoniano é dada respectivamente por

$$\hat{T}\hat{H}=\frac{\widehat{p^2}}{2}+V^*(x), \tag{4}$$

e

$$\hat{P}\hat{T}\hat{H}=\hat{H}\hat{P}\hat{T}=\frac{\widehat{p^2}}{2}+V^*(-x)=\hat{H}. \tag{5}$$

A partir de (5) concluímos que um Hamiltoniano possui simetria PT se a seguinte condição é satisfeita

$$V(x)=V^*(-x). \tag{6}$$

METODOLOGIA

Modelando um sistema quântico com simetria *PT*, utilizando o seguinte potencial

$$v(x)+iw(x)=-v_1 sech^2(x)+v_2 \tanh(x) sech(x). \tag{7}$$

Esse potencial possui um espectro real e tem apenas um número finito de autovalores. A equação de Schrödinger, independente do tempo, para o potencial (7) é

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\left[k^2-v_1 sech^2(x)+v_2\tanh(x)*sech(x)\right]\psi=0 \tag{8}$$

onde $\sqrt{E}=k$. Utilizando as seguintes transformações de coordenadas

$$z=\frac{1-i\sinh(x)}{2}, \tag{9}$$

e

$$\psi(x)=z^{-p}(1-z)^q F(z) \tag{10}$$

se obtêm a equação hipergeométrica de Gauss

$$z(1-z)\frac{d^2\psi}{dx^2}+[-p+0{,}5-(-2p-2q+1)z]\frac{dF}{dx}-\left[(p+q)^2+k^2\right]F=0, \tag{11}$$

onde

$$-p^2-\frac{p}{2}+\frac{(v_1+iv_2)}{4}=0, \tag{12}$$

e

$$-q^2-\frac{q}{2}+\frac{(v_1+iv_2)}{4}=0 \tag{13}$$

a solução da equação (11) é [2]

$$\psi(x)=\left(\frac{1-isinh(x)}{2}\right)^{-p}\left(\frac{1-isinh(x)}{2}\right)^{-q} 2F_1\left[-p-q+ik,-p-q-ik,-2p+\frac{1}{2}+\left(\frac{1-isinh(x)}{2}\right)\right] \tag{14}$$

a solução (14) possui uma expressão para as auto-energias da forma

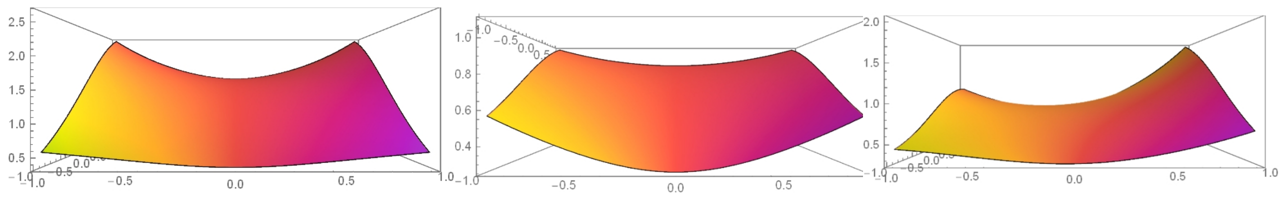
$$E_n=-\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{1}{4}+v_1+v_2}\pm i\sqrt{v_2-\frac{1}{4}-v_2}\right]\right)^2. \tag{15}$$

É observável que as autoenergias se tornam complexas quando $v_2>v_1+\frac{1}{4}$ Isso ocorre devido a uma quebra espontânea da simetria *PT*, quando $v_2=v_1+\frac{1}{4}$ Esses pontos são conhecidos como pontos excepcionais e são singularidades espectrais no espaço de parâmetros de um sistema, onde dois ou mais autovalores assumem o mesmo valor.

através de um código criado no mathematica plotamos a figura 1 que é a solução da equação (14) para os 3 casos Possíveis.

Figura 1 a) gráfico da eq (14) para p=-0,1 q=-0,457 e ik=-0,443 situação simetria intacta 1b) gráfico da eq (14) para $p=0$ e $q=0,54$ e $ik=0,46$ situação ponto excepcional c) gráfico da eq (14) para $p=0,25-0,111i$ e $q=0,58$ e $ik=0.202-0.111i$ situação simetria quebrada

a) b) c)



fonte:autoria própria (2023)

Em 2008 o conceito de Hamiltoniano com simetria *PT* foi adequadamente aplicado à óptica não linear [3]. A modelagem de estruturas ópticas em 1 e 2 dimensões como fibras ópticas e redes cristalinas pode ser feita através de uma função que representa o potencial óptico $V(x)$, definido no Hamiltoniano do sistema, que descreve o espalhamento de um pulso óptico em tais estruturas. Esta modelagem pode ser feita através de um algoritmo adequado que simule o espalhamento do pulso óptico gerando a banda de condução que corresponde aos modos de oscilação ou aos comprimentos de ondas conduzidos na estrutura cristalina. A dinâmica do espalhamento de pulsos ópticos em estruturas cristalinas pode ser descrita pela equação de Schröndinger não linear

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+[v(x)+iw(x)]\psi+|\psi^2|\psi=0, \qquad (16)$$

onde ψ é o campo óptico, $v(x)$ e $w(x)$ representam os potencias ópticos que descrevem a difração do pulso e *z* é a direção de propagação. A equação (16) possui soluções estáveis conhecidas como solitons ópticos e que são gerados na realidade pelo espalhamento dos pulsos ópticos na rede cristalina. Essas soluções têm importantes aplicações na transmissão e processamento de informações pois apresentam pouca perda de energia mantendo a sua forma ao longo do guia de onda.

Tomando como base o método descrito no trabalho [3], investigaremos numericamente a equação de Schrödinger não linear utilizando o Mathematica. Iremos caracterizar as soluções da equação (16) na forma

$$\psi(x,z)=\varphi(x)_{kn}\exp(i\beta_n(k)z). \qquad (17)$$

Ao substituir a equação (17) na equação (16), obtemos

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+v(x)+iw(x)-\beta_{kn}+\left|\varphi_{kn}^{\ 2}\right|\right]\varphi_{kn}=0, \tag{18}$$

onde φ é o campo óptico, β_{kn} representa os modos de oscilação k_n, $v(x)$ e $w(x)$ representam os potenciais ópticos difrativos. Para reduzimos a ordem da equação diferencial (18) iremos definir uma função $U(x)$ a partir do campo óptico $\varphi_{kn}(x)$ e suas derivadas

$$\varphi_{kn}(x)=U(x), \tag{19}$$

$$\frac{d\varphi}{dx}=U', \tag{20}$$

$$\frac{dU}{dx}=U'. \tag{21}$$

A partir dessas equações a equação (18) pode ser escrita como

$$\frac{dU'}{dx}=\left(-v(x)-iw(x)+\beta_{kn}-U^2\right)U(x). \tag{22}$$

A equação (22) pode então ser implementada no Matlab ou Mathematica para se obter as estruturas de banda de cristais fotônicos e guias de onda que são descritas pelos potenciais ópticos difrativos.

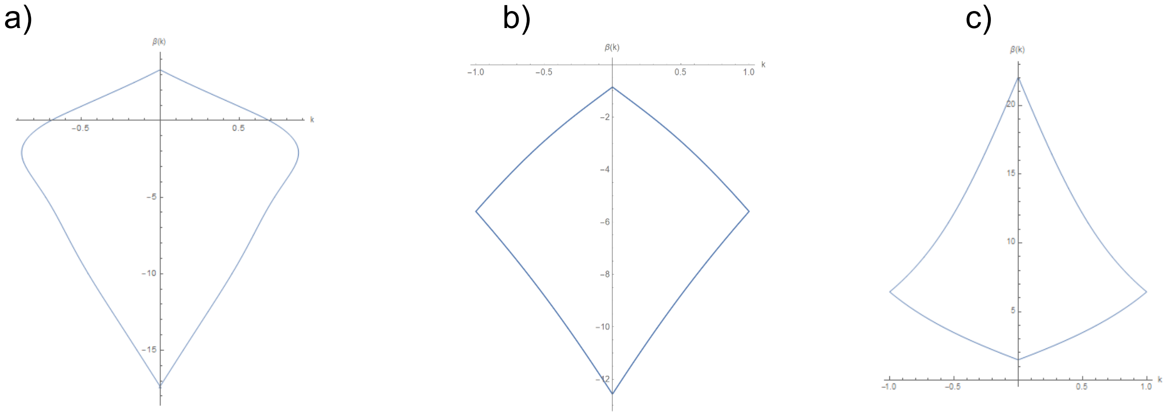
A partir do algoritmo apresentado acima devolvido no mathematica analisamos os seguinte potencial

$$v(x)+iw(x)=x^2\left(a+ibx^n\right), \tag{23}$$

onde a e b é um número real e n pode ser um número inteiro ou semi-inteiro, segue abaixo estruturas de bandas para um serie de a e n

figura 2a) estrutura de banda para $a=1$, $b=0{,}5$ e $n=1$ b) estrutura de banda para $a=2$, $b=1$ e $n=1{,}5$ c) estrutura de banda para $a=1$, $b=1$ e $n=3$

a) b) c)



fonte: autoria própria (2023)

como vemos na figura 2 para diversos valores de a, b e n obtivermos diversas estruturas de bandas correspondentes cujos perfis representam guias de ondas característicos.

Conclusão

No âmbito da mecânica quântica e da óptica não linear, foram investigados sistemas não-hermitianos que exibem simetria de paridade e inversão temporal (PT). No contexto da mecânica quântica, desenvolveu-se um código no software Mathematica para obter o gráfico da solução da equação (14). No contexto da óptica, criou-se um algoritmo para determinar as estruturas de banda de potenciais ópticos. Esses potenciais ópticos descrevem o espalhamento da luz em estruturas ópticas, como fibras ópticas, modulando o índice de refração do sistema e, assim, gerando um pulso óptico que se propaga ao longo dos guias de onda correspondentes. Estes pulsos ópticos apresentam baixa dispersão e baixa perda de energia, mantendo sua forma durante a propagação e são conhecidos como solitons ópticos. Devido a essas propriedades, tais pulsos ópticos não lineares podem ser aplicados no desenvolvimento de filtros ópticos, por apresentarem uma estrutura de banda bem definida, bem como na transmissão e no processamento de sinais ópticos não lineares.

Agradecimentos

Agradeço ao Dr. Antonio Carlos Amaro de Faria Jr. pela oportunidade de continuar minha pesquisa de iniciação científica por mais um ano.

Conflito de interesse

Não ha conflito de interesse

REFERÊNCIAS

[1] BENDER, Carl M.; BOETTCHER, Stefan. Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry. Physical review letters, v. 80, n. 24, p. 5243, 1998.

[2] Ahmed, Zafar. Real and complex discrete eigenvalues in an exactly solvable one-dimensional complex PT -invariant potential. Physics Letters A 282 (2001) 343–348

[3] MUSSLIMANI, Z. H. et al. Optical solitons in P T periodic potentials. Physical Review Letters, v. 100, n. 3, p. 030402, 2008.