



Ações do professor para promover o raciocínio matemático

Teacher's actions that promotes the mathematical reasoning

Mariana Martini Rodrigues¹, Henrique Rizek Elias²

RESUMO

O objetivo desse artigo é estudar um método de ensino que possa atender às necessidades dos estudantes e orientá-los a desenvolverem suas habilidades no estudo da matéria de Equações Diferenciais Ordinárias por meio da modelagem matemática. O foco principal dessa pesquisa, e seu diferencial em relação a estudos com temáticas similares, está na análise das ações do professor em sala de aula, divididas entre as categorias: Convidar, Guiar/Apoiar, Informar/Sugerir e Desafiar, e como elas podem facilitar e potencializar o aprendizado do aluno. Assim, esse estudo busca identificar e categorizar as ações exercidas pelo professor durante uma aula de análise sobre um experimento referente à Lei do Resfriamento de Newton, realizado em aulas anteriores. Como auxílio para a realização dessa análise, foi utilizada a ferramenta GeoGebra para ajudar na construção do gráfico de tendência da temperatura e na modelagem da EDO que melhor descrevesse o comportamento dessa temperatura em função do tempo.

PALAVRAS-CHAVE: ações do professor, Equações Diferenciais Ordinárias, raciocínio matemático.

ABSTRACT

The objective of this article is to study a teaching method that can meet the needs of students and guide them to develop their skills in the study of the subject of Differential Ordinary Equations through mathematical modeling. The main focus of this research, and its differential in relation to studies with similar themes, is the study of the actions of the teacher in the classroom, divided into the categories: Invite, Guide/Support, Inform/Suggest and Challenge, and how they can facilitate and enhance student learning. Thus, this study attempt to identify and categorize the actions performed by the teacher during an analysis class of an experiment related to Newton's Law of Cooling, carried out in previous classes. As an aid to this analysis, the GeoGebra program was used to help in the construction of the temperature trend graph and the modeling of the ODE that best described the behavior of this temperature as a function of time.

KEYWORDS: teacher actions, Differential Ordinary Equations, mathematical reasoning.

INTRODUÇÃO

Buscando estudar uma abordagem de ensino distinta da tradicional, que pudesse contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático e potencializar o aprendizado e a compreensão dos alunos, o professor responsável pela disciplina Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) para os cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental da UTFPR, *campus* Londrina, no ano de 2023 promoveu uma pesquisa sobre sua própria prática entender e categorizar as ações que um professor pode tomar para atender esse propósito.

Santos e Elias (2023), ao analisarem trabalhos acadêmicos de mestrado e doutorado, constataram que, no que se refere ao estudo de EDO direcionado para Engenharias, essas pesquisas tendem a focar na metodologia de ensino que melhor atenda e contribua para o desenvolvimento de habilidades dos estudantes dessa área. O diferencial dessa pesquisa está no fato de ela focar nas ações do professor que leciona

¹ Bolsista da CNPq. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: marianamartini@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 2070226250008907.

² Docente do Departamento Acadêmico de Matemática (DAMAT-LD) e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT-CP/LD). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: henriqueelias@utfpr.edu.br. ID Lattes: 1158460330500121.



EDO e em como elas podem promover o raciocínio matemático dos alunos, podendo trazer novas contribuições para o ensino de EDO no Ensino Superior.

AÇÕES DO PROFESSOR PARA PROMOVER O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Raciocínio matemático é o conjunto de processos mentais complexos. Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 782) afirmam que “raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas, ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”. De acordo com Araman, Serrazina e Ponte (2019), autores como Lannin *et al.* (2011) consideram que o raciocínio matemático envolve vários processos interrelacionados, como conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar.

Araman, Serrazina e Ponte (2019) elaboraram um quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático dos estudantes, conforme Figura 1. Neste quadro, os autores apresentam as categorias de ações e como elas podem ser executadas pelo professor durante o desenvolvimento da tarefa.

Figura 1 - Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático.

C A T E G O R I A S	Convidar	<ul style="list-style-type: none"> - Solicita respostas para questões pontuais. - Solicita relatos de como os alunos fizeram. 	A Ç Õ E S
	Guiar/Apoiar	<ul style="list-style-type: none"> - Fornece pistas aos alunos. - Incentiva a explicação. - Conduz o pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. - Encoraja os alunos a (re)dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a (re)elaborarem suas respostas. 	
	Informar/Sugerir	<ul style="list-style-type: none"> - Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - (Re)elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução. 	
	Desafiar	<ul style="list-style-type: none"> - Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão. - Pressiona para a precisão. - Pressiona para a generalização. 	

Fonte: ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019 p. 476.

Os autores destacam que, embora o quadro apresente as categorias em uma ordem, não existe obrigatoriedade de sequência entre elas, nem de hierarquização. Entretanto, há algumas ações apresentam maior potencial para apoiar o raciocínio (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019).

METODOLOGIA

Foi realizada uma coleta³ de dados nos dias 12,17 e 19 de abril de 2023, durante as aulas de EDO, para, posteriormente, realizar-se uma análise qualitativa a partir dessa coleta. Para essa pesquisa, foi escolhido o tema Lei de resfriamento de Newton para formular um modelo matemático de uma equação diferencial de primeira ordem. Com o auxílio de um gravador de áudio, o professor registrou suas interações com os alunos para a análise posterior.

³ Essa pesquisa teve aprovação do Comitê de Ética em Pesquisas envolvendo Seres Humanos (CEP – UTFPR) sob o número CAAE: 65033822.6.0000.5547.



No primeiro dia (duas aulas de 50 minutos cada), foi realizado o experimento. Os alunos foram divididos em seis grupos, cada grupo recebeu um recipiente diferente, com água (quente ou fria) e um termômetro, e realizaram o monitoramento da temperatura da água durante 100 minutos, em intervalos de 10 minutos, enquanto ela se aproximava da temperatura ambiente de 26,4°C. Na **Figura 2** é possível observar a coleta de dados realizada pelos Grupos 1 e 4.

Figura 2 – informações registradas pelos alunos do Grupo 1 e do Grupo 4 no primeiro dia

Grupo 1 (Caneca de Plástico)		Grupo 4 (Copo de vidro)	
Horário	Temperatura da água Termômetro Culinário	Horário	Temperatura da água Termômetro Culinário
16h10	74,6° C	16h06	3,3° C
16h19	61° C	16h18	8,9° C
16h29	53,8° C	16h28	12,1° C
16h39	48,1° C	16h38	15° C
16h50	43,6° C	16h49	17,3° C
17h	40,2° C	17h	19,2° C
17h10	38,1° C	17h09	20,1° C
17h21	36,3° C	17h19	20,9° C

Fonte: os autores

No segundo dia (duas aulas de 50 minutos cada), foram feitas pelos alunos as análises sobre os dados coletados na aula anterior. Foi fornecido a todos os grupos, pelo professor, os dados dos Grupos 1 e 4, apresentados na **Figura 2**, para, a partir deles, ser gerado um modelo matemático pelo uso de uma EDO. O professor visava que os alunos compreendessem que a taxa de variação da temperatura é proporcional à diferença entre a temperatura medida T e a temperatura ambiente T_a , ou seja:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (\text{onde } k > 0)$$

No terceiro dia (duas aulas de 50 minutos), o professor convida os alunos a apresentarem os resultados encontrados na aula anterior e os auxilia para uma melhor compreensão sobre a atividade proposta. Para isso, o professor passa por cada grupo, esclarecendo suas dúvidas e os conduzindo às respostas que necessitam, além de incentivar o uso do software GeoGebra, caso julguem necessário. Para uma segunda parte da aula, o professor pede que os alunos resolvam a EDO.

Neste artigo, será feita uma análise mais minuciosa sobre as interações do professor com o Grupo 1, a partir do áudio coletado pelo professor durante o terceiro dia, usando nomes fictícios para preservar o anonimato dos alunos. Para isso, serão utilizadas as categorias de ação do professor segundo Araman, Serrazina e Ponte (2019), apresentadas entre colchetes logo após cada fala transcrita do professor durante as interações com os alunos.

ANÁLISES

O professor inicia a aula do terceiro dia convidando os alunos a compartilharem com a turma o modelo de EDO que encontraram na aula anterior. Alguns dos grupos expuseram



suas equações. O primeiro modelo proposto foi o seguinte: $\frac{dA}{dt} = k(A(t) - 26,4)$, e o Grupo 1 se manifestou logo depois, tendo chegado no modelo $\frac{dA}{dt} = k(A(t) - 26,4)$. A partir dessas equações, o professor induz a turma a discutir sobre a diferença entre essas duas equações.

[1] Professor: *O que muda nessas equações aí? Que diferença faz estar 26,4 menos T, ou C, ou A, e estar A menos 26,4? O que muda essa ordem estar trocada?* [desafiar – encoraja avaliação]

Após uma reflexão sobre o tema, o professor consegue levar os alunos a entenderem o significado matemático dessa diferença. Em um segundo momento da aula, o professor conversa com cada um dos grupos, verificando até onde conseguiram chegar para poder orientá-los sobre como prosseguir. Quando conversa com o Grupo 1, o professor identifica uma dificuldade sobre a realização do cálculo da constante k.

[2] Professor: *Como é que vocês estão?* [convidar – solicita relato]

[3] Lucas: *professor, a gente...cada ponto vai passar diferente [no gráfico]?*

[4] Professor: *por que que isso acontece?* [desafiar – encoraja avaliação]

[5] Lucas: *é que a gente tentou fazer com o outro ponto, e deu quase a metade desse, professor, ficou muito estranho.*

[6] Professor: *pra achar o valor do K?* [guiar – incentiva explicação]

[7] Lucas: *é, ficou muito discrepante*

[8] Professor: *como assim? Vocês pegaram, primeiro...* [guiar – incentiva explicação]

[9] Lucas: *isso, a gente fez com esse valor aqui de água quente, no tempo 9 deu 61 [61°C]. Aí deu esse k aqui. Só que a gente foi tentar fazer com outro valor, acho que nesse 19 [t=19] e 53,8 [61°C], deu metade desse quase.*

[10] Daniela: *deu 0,17.*

[11] Lucas: *é, 0,17, menos 0,17*

[12] Professor: *menos 0,17. Ahn, vocês estão sem computador, eu vou pegar meu computador ali e vou pegar o GeoGebra, porque eu acho que ele vai ajudar vocês a pensarem isso* [informar – fornece múltiplas estratégias de resolução]

Nesse trecho, é possível observar como o professor convida [2] os alunos a exporem seu avanço até ali, os desafia [4], guia [6 e 8] e informa [12] sobre a plataforma GeoGebra, ações essas que podem contribuir para que os alunos sanem suas dúvidas iniciais.

Posteriormente, quando o professor retorna para verificar o avanço do Grupo 1, ele novamente convida os alunos a relatarem o que fizeram e os guia [13] para explicar as lacunas que ainda existam. É identificado um equívoco na resolução apresentada por esse grupo e são apresentadas algumas informações [19 e 21] para ajudar os alunos a encontrarem o caminho correto a ser seguido.

[13] Professor: *qual é o valor de k que deu na conta de vocês?* [guiar – incentiva explicação]

[14] Lucas e Daniela: *tem vários, várias possibilidades.*

[15] Professor: *então, mas aí, então tem alguma coisa estranha. Como é que vocês acharam o valor de C [constante]?* [desafiar – encoraja avaliação]



[16] Lucas: *o que é C mesmo?*

[17] Professor: *Quando vocês integraram ali, não surgiu uma constante? [convidar – solicita resposta a questão pontual]*

[18] Lucas: *não.*

[19] Professor: *Aqui está errado, quando vocês integram de cada lado, a integral disso surge uma constante C. [informar – corrige resposta incorreta]*

[20] Lucas: *verdade, a gente esqueceu!*

[21] Professor: *então, é, essa constante C surge da resolução da EDO [informar – fornece informação]*

[22] Lucas: *a gente esqueceu completamente.*

Desse modo, os alunos resolveram os problemas que foram identificados e, em um novo retorno do professor, o grupo apresentou seus resultados e informou ao professor sobre um método não algébrico utilizado por eles para a resolução do problema, com a ajuda do *GeoGebra*.

[22] Lucas: *foi a constante mesmo, professor, que a gente esqueceu. Agora deu certo*

[23] Professor: *a solução escrita, assim, a completa. É isso aqui? Aqui está o quê? Mas, o k ... você já achou o valor da solução com o k ? [convidar – solicita resposta a questões pontuais]*

[24] Lucas: *a gente foi chutando [valores para o k].*

[25] Professor: *vocês pegaram o controle deslizante e foram ajustando até chegar próximo [a uma função que se adequasse aos dados], é uma ideia [informar – valida resposta correta].*

[26] Professor: *Tem um jeito que a gente poderia usar algebricamente pra achar também o valor de K . Como? [guiar – encoraja a reelaborar resposta].*

O professor valida o método utilizado pelo grupo, mas também o guia [26], de modo que seus integrantes possam resolver a EDO também pelo método algébrico tradicional. Já no final da aula, os alunos conseguem chegar no resultado pelo cálculo algébrico, e o professor informa [29] seu parecer final o desempenho do Grupo 1 ao longo da atividade.

[27] Professor: *ahan, isso, no primeiro momento vocês tinham esquecido C. Aí, usando a condição inicial, vocês conseguem achar o valor de C. Depois de achar o valor de C, pega um outro ponto e acha o valor de k . [guiar – conduz pensamento]*

[28] Mário: *aí faz todos eles e vê qual ponto fica mais próximo?*

[29] Professor: *é, você pode... escolhe um ponto, não precisa fazer em todos. A condição inicial é interessante pra o primeiro caso, pelo fato de t ser zero, vai ficar e elevado a zero e vocês vão conseguir achar a constante C facilmente. Mas aí, pra achar o valor de K , você substitui outro ponto [informar – fornece explicação/ guiar – conduz pensamento]. Aí vocês vão conseguir achar uma expressão pra solução da EDO sem precisar fazer esse procedimento, mas a saída de vocês foi boa, com o *GeoGebra* [informar – múltiplas estratégias].*

CONSIDERAÇÕES FINAIS



O objetivo do artigo de estudar e categorizar as ações do professor durante a realização de uma aula experimental para a matéria de EDO para cursos de Engenharia foi atingido. Ao longo da análise, é possível identificar, nos diálogos transcritos da aula, o professor realizando as ações citadas de Convidar, Guiar/Apoiar, Informar/Sugerir e Desafiar.

É notório, ao realizar uma análise completa do áudio, que a ação de maior ocorrência foi a de Guiar/Apoiar e a de menor ocorrência foi a de desafiar. Por um lado, essas ações apoiam o raciocínio matemático dos alunos, mostrando-os o caminho a ser seguido para atingirem as respostas que precisam. Por outro lado, a ação de desafiar possui uma grande importância para promover o raciocínio dos alunos, devendo ser mais explorada por professores que possuem isso como propósito.

Por limitações de páginas, não foi possível apresentar todos os dados coletados e as análises realizadas durante a Iniciação Científica. Entretanto, um artigo mais amplo e completo foi submetido ao III Encontro Paranaense de Tecnologia na Educação Matemática e, se aprovado, será apresentado no evento.

Agradecimentos

Agradecemos ao apoio financeiro recebido pela agência financiadora da bolsa CNPq por meio do Edital PROPPG Nº 02/2022 - Programa Institucional de Iniciação Científica (PIBIC). Agradecemos também à aluna Tais Mara dos Santos do curso de mestrado profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) pela colaboração na coleta dos dados e parceria em outro trabalho.

Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

ARAMAN, E. M. D. O.; SERRAZINA, M. D. L.; DA PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, p. 466-490, 2019.

AZEVEDO, A. **O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem de funções**. 2009. 194 f. Dissertação (Mestrado em Educação, especialização Didáctica da Matemática) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2009.

LANNIN, J.; ELLIS, A.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston, VA: Nation Concil of Teachers of Mathematics, out. 2011.

MATA-PEREIRA, J; PONTE, J. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro (SP), dez. 2018

SANTOS, T; ELIAS, H. Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Engenharia: um levantamento bibliográfico. **ReBECM**, v.7, n.3, p. 363-381, 2023.