



# Implementação de algoritmo de estabilização robusta em um pêndulo invertido rotativo

## Implementation of real time robust stabilization algorithm in a rotary inverted pendulum

Nilton Vedovelli Junior<sup>1</sup>,

Emerson Ravazzi Pires da Silva<sup>2</sup>

### RESUMO

Um dos problemas clássicos e cruciais na engenharia e no controle automático é a estabilização de um pêndulo. A tarefa é, comumente, projetar controladores que conduzam o pêndulo para a posição vertical, chamado de ponto de equilíbrio instável. Logo, o presente trabalho consiste em investigar o equipamento QUBE-Servo, fabricado pela QUANSER. Este dispositivo possui um braço rotativo que se move na horizontal e um pêndulo na extremidade que se move na vertical. Dentro do escopo deste trabalho é apresentado o modelo matemático da planta e os parâmetros necessários para a validação da estabilização do pêndulo invertido rotacional através da estratégia de controle ótimo LQR (do inglês, *linear-quadratic regulator*). O trabalho tem como objetivo apresentar um comparativo entre duas técnicas de controle LQR, o clássico e o robusto via LMI's (do inglês, *linear matrix inequalities*). Para isso, foi construído um objeto para representar uma incerteza de projeto e validar os métodos. O projeto do controlador é tratado e validado por implementações em tempo real, podendo ser feito assim um comparativo, demonstrando o fato de o controle robusto atuar melhor no intervalo com o valor da incerteza especificado.

**PALAVRAS-CHAVE:** controle robusto; desigualdade linear matricial; pêndulo invertido rotativo; regulador quadrático linear.

### ABSTRACT

A classic and crucial problem in engineering and automatic control is the stabilization of a pendulum, the task is, commonly, to design controllers that lead the pendulum to the vertical position, called the unstable equilibrium point. Therefore, the present work aims to investigating the QUBE-Servo equipment, manufactured by QUANSER. This module has a rotating arm that moves horizontally and a pendulum at the end that moves vertically. Within the scope of this work, the mathematical model of the plant and the necessary parameters for validating the stabilization of the rotary inverted pendulum using the optimal control strategy LQR (linear-quadratic regulator) are presented. The objective of this paper is to present a comparison between two LQR control techniques, the conventional and the robust via LMI's (linear matrix inequalities). For this, an object was built to represent a project uncertainty and validate the methods. The controller design will be treated and validated by real-time implementations, allowing a comparison between the projects, demonstrating the fact that the robust control works better in an interval with the specified uncertainty value.

**KEYWORDS:** robust control; linear matrix inequality; rotary inverted pendulum; linear quadratic regulator.

### INTRODUÇÃO

Sistemas de controle desempenham um papel vital nas indústrias e na vida cotidiana, tendo suas raízes em sistemas de controle biológicos antigos (NISE, 2013). Eles são essenciais tanto

<sup>1</sup> Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. E-mail: niltonvedovellijunior@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 8114961119173161.

<sup>2</sup> Docente no Departamento da Elétrica (DAELE). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Paraná, Brasil. E-mail: emersonr@utfpr.edu.br. ID Lattes: 0797649979829091.



para a gestão de perturbações quanto para a estabilização de sistemas potencialmente instáveis (JESUS RUBIO et al., 2012). Um desafio notável na teoria do controle é o equilíbrio de um pêndulo invertido rotacional, conhecido como Pêndulo de Furuta, que serve como um exemplo clássico de uma planta não linear amplamente estudada em aplicações de estabilização (ACOSTA, 2010). Dado o seu amplo campo de estudo e aplicação, o controle desse pêndulo é considerado um objeto de estudo valioso com implicações significativas para o avanço tecnológico (MATHEW; RAO; SIVAKUMARAN, 2013).

Este trabalho tem como foco principal o estudo e a comparação de técnicas de estabilização do pêndulo invertido rotacional, com ênfase especial no uso do método do Regulador Quadrático Linear (LQR), explorando tanto sua forma clássica quanto sua forma robusta via inequações lineares matriciais (LMI). O objetivo é contribuir para o avanço contínuo das tecnologias de controle e automação, aproveitando os desafios e oportunidades apresentados por esse sistema emblemático.

## MATERIAIS E MÉTODOS

O desenvolvimento do projeto foi a partir da utilização do QUBE-Servo, fabricado pela Quanser. Trata-se de uma planta com a dinâmica do pêndulo invertido rotacional.

### MÓDULO QUANSER QUBE-SERVO

O Quanser QUBE-Servo, ilustrado na Figura 1, é um sistema servo rotativo compacto que pode ser usado para uma variedade de experimentos clássicos de servo-controle e pêndulo invertido.

Figura 1 – Módulo Qube Servo



Fonte: QUANSER-CONSULTING-INC (2013)

Como pode-se notar, é um equipamento com um braço rotacional preso em um eixo capaz de se movimentar no plano horizontal e com uma haste inserida em sua extremidade, livre para rotacionar na vertical. O braço rotativo por sua vez está anexado a um motor de corrente contínua capaz de rotacionar o sistema e movimentar o pêndulo.

## Parâmetros do sistema

Algumas especificações importantes para o desenvolvimento do trabalho são encontradas no Quadro 1.

**Quadro 1 – Parâmetros do sistema original**

Símbolo	Descrição	Valor
$m_r$	Massa do braço rotativo	0,100 kg
$L_r$	Comprimento do braço rotativo	0,095 m
$M_p$	Massa do pêndulo	0,024 kg
$L_p$	Comprimento do pêndulo	0,127 m

Fonte: Adaptado de QUANSER

## OBJETO DE INCERTEZA

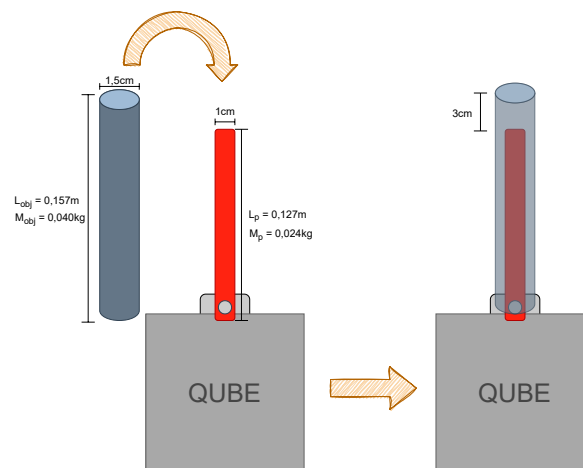
Para a implementação de uma técnica de controle robusto é necessário uma incerteza no projeto, que por sua vez se dará pela adição de um objeto na haste do pêndulo, conseqüentemente aumentando seu comprimento e sua massa. A partir de testes experimentais, o objeto foi construído de maneira a exceder em 3cm o topo da haste e com uma massa  $M_{obj} = 0.040kg$ . A representação do objeto pode ser vista na Figura 2. Desta forma, o controle robusto será projetado com os parâmetros do pêndulo mostrados no Quadro 2.

**Quadro 2 – Parâmetros com as incertezas**

Símbolo	Descrição	Valor
$m_r$	Massa do braço rotativo	0,100 kg
$L_r$	Comprimento do braço rotativo	0,095 m
$M_p$	Massa do pêndulo	[0,024 0,064] kg
$L_p$	Comprimento do pêndulo	[0,127 0,157] m

Fonte: Adaptado de QUANSER

**Figura 2 – Representação do objeto de incerteza no QUBE**



Fonte: Elaborado por autores (2023)



## CONTROLADOR

O método utilizado para o controle da haste do pêndulo será via realimentação de estados. Com esta forma de controle, será feito um comparativo entre duas técnicas, o LQR Clássico e o LQR Robusto.

### LQR Clássico

O LQR busca minimizar a função  $J$  representada pela Eq. (1).

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (1)$$

Para isso, é necessário definirmos valores para as matrizes de penalidades  $Q$  e  $R$ . O vetor de estados utilizado é visto na Eq. (2).

$$x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^T \quad (2)$$

Como só existe uma entrada a ser controlada (tensão  $V_m = u$  do motor),  $R$  é um escalar e a estratégia de controle utilizada para minimizar a função  $J$  é dada pela Eq. (3).

$$u = K(x_r - x) \quad (3)$$

### LQR Robusto

As LMIs utilizadas para o projeto foram apresentadas em Dilson et al. (2021), onde é proposto o seguinte teorema:

**Teorema 1.** Para  $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , e  $x_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , o sistema incerto é estável com  $u = -Kx$ , usando a taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma$  e custo garantido  $J$  inferior a  $\mu$ , se para um dado escalar  $c > 0$ , existirem matrizes  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $W_i > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , com  $i = 1, 2, \dots, N$ , de tal modo que:

$$\min \mu$$

$$W_i = W_i^T > 0, Z, Y$$

Sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu & * \\ x_0 & Y^T + Y - W_i \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} A_i Y + B_i Z + Y^T A_i^T + Z^T B_i^T + 2\gamma_i & * & * & * \\ W_i - Y^T + c A_i Y + c B_i Z & -cY - cY^T & * & * \\ Q_i Y & 0 & -Q_i & * \\ R_i Z & 0 & 0 & -R_i \end{bmatrix} < 0$$



uma vez que \* denota bloco simétrico na LMI.

E o ganho  $K$  é dado por:

$$K = ZY^{-1} \tag{4}$$

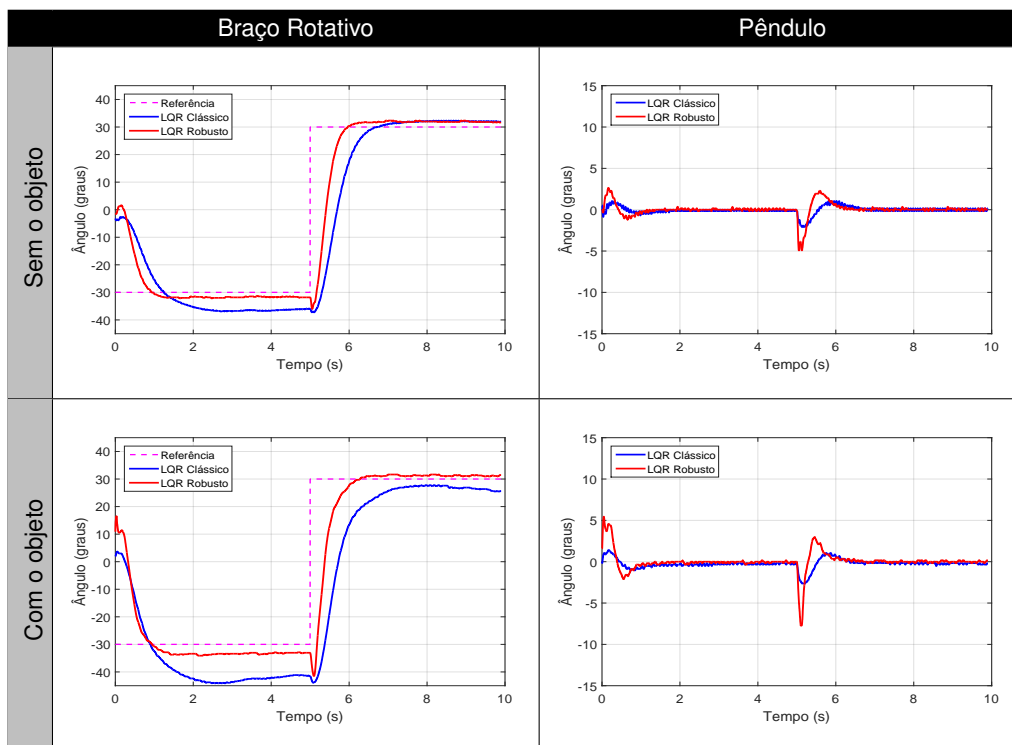
**Prova.** Vide (DILSON et al., 2021).

Sendo  $Q_i$  e  $R_i$  as matrizes de ponderação do LQR para cada um dos vértices formados pela combinação convexa das incertezas, denominado politopo (TROFINO, 2000),  $x_0$  é a condição inicial e  $c$  é o escalar de flexibilização da LMI.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os testes foram realizados para os dois controladores com e sem o objeto. Desta forma, para uma melhor visualização das diferenças foi gerado o Quadro 3. Neste quadro é apresentado separadamente os gráficos do movimento do braço rotativo e do pêndulo, e sobrepostas as respostas dos dois controladores.

**Quadro 3 – Comparativo dos resultados**



Fonte: Elaborado por autores (2023)

Analisando matematicamente os gráficos do movimento do braço rotativo em relação a seus valores mais próximos ao regime permanente, é elaborado o Quadro 4 para uma análise numérica.

**Quadro 4 – Análise dos resultados**

	Referência	LQR Clássico	ERRO	LQR Robusto	ERRO
Sem objeto	+30°	31,99°	6,63%	31,82°	6,07%
	-30°	-36,39°	21,30%	-31,82°	6,07%
Com objeto	+30°	25,49°	15,03%	30,94°	3,13%
	-30°	-41,13°	37,10%	-33,40°	11,33%

Fonte: Elaborado por autores (2023)



## CONCLUSÃO

Neste estudo sobre o pêndulo invertido rotacional, duas técnicas de estabilização foram exploradas: o LQR Clássico e o LQR Robusto. Ambos foram capazes de manter o sistema estável, mesmo quando uma incerteza foi introduzida, alterando a massa e o comprimento da haste do pêndulo. No entanto, o Controle Robusto se destacou ao lidar melhor com essa condição adversa, pois foi projetado para acomodar variações nos valores originais de massa e comprimento, bem como o fato de existir a taxa de decaimento. De maneira geral, o LQR Robusto demonstrou melhor performance na condição adversa, enquanto o LQR Clássico exibiu uma notável capacidade de estabilizar o sistema, demonstrando robustez o bastante para manter o sistema estabilizado com valores que não foram estabelecidos em projeto.

## Agradecimentos

Agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná por proporcionar esta experiência como pesquisador de Iniciação Científica.

## Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

## REFERÊNCIAS

ACOSTA, J.A. Furuta's Pendulum: A Conservative Nonlinear Model for Theory and Practise. **Mathematical Problems in Engineering**, mar. 2010. Disponível em: [🔗](#).

DILSON, Junior A. A. et al. Projeto de controlador robusto LQR via desigualdades matriciais lineares. **XV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente**, out. 2021.

JESUS RUBIO, Jose de et al. Control para estabilizar y atenuar las perturbaciones en un pêndulo invertido rotatorio. **Revista Mexicana de Fisica**, v. 58, p. 107–112, ago. 2012.

MATHEW, Navin John; RAO, K. Koteswara; SIVAKUMARAN, N. Swing Up and Stabilization Control of a Rotary Inverted Pendulum. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 46, n. 32, p. 654–659, 2013. 10th IFAC International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems. ISSN 1474-6670.

NISE, Norman S. **Control Systems Engineering**. 6. ed. [S.l.]: LTC, 2013.

QUANSER-CONSULTING-INC. QUBE-Servo User Manual, 2013.

TROFINO, Alexandre. **Controle Robusto**. [S.l.: s.n.], 2000.