



Modelo numérico-computacional para análise linear dinâmica de treliças planas por meio de métodos da família de Newmark com o programa Scilab

Numerical-computational model for dynamic linear analysis of plane trusses using methods of the Newmark family with the Scilab program

Eros Adrian Santos Franco de Morais¹, Luiz Antonio Farani de Souza²

RESUMO

Um modelo numérico-computacional é apresentado para a análise dinâmica linear de treliças planas baseado no Método dos Elementos Finitos. Um programa computacional é desenvolvido com o software livre Scilab. A solução aproximada da equação do movimento para o equilíbrio dinâmico é obtida por meio de dois métodos da família de Newmark, quais sejam, aceleração média constante e aceleração linear. Utiliza-se uma matriz diagonal de massa condensada nas análises, a qual requer menos espaço de armazenamento e menos esforço computacional. A matriz de amortecimento é estabelecida proporcional à matriz de massa, por intermédio da introdução de um coeficiente de amortecimento. A análise transiente de um sistema estrutural com duas barras biarticuladas submetida a dois tipos de cargas dinâmicas é apresentada considerando o efeito do amortecimento. Os resultados preliminares mostraram que o amortecimento estrutural, que é uma medida de dissipação de energia, levou a estrutura de um estado vibratório para um estado em repouso. Além disso, concluiu-se que, para a definição do método de integração direta a ser utilizado pelo analista/projetista em simulações estruturais, dois aspectos devem ser considerados na análise dinâmica - a precisão e a estabilidade.

PALAVRAS-CHAVE: análise transiente; amortecimento; treliça plana.

ABSTRACT

A numerical-computational model is presented for the linear dynamic analysis of plane trusses based on the Finite Element Method. A computational program is developed with the free program Scilab. The approximate solution of the equation of motion for dynamic equilibrium is obtained by means of two methods of the Newmark family, namely, constant mean acceleration and linear acceleration. A condensed mass diagonal matrix is used in the analyses, which requires less storage space and less computational effort. The damping matrix is established proportional to the mass matrix, through the introduction of a damping coefficient. The transient analysis of a structural system with two biarticulated bars subjected to two types of dynamic loads is presented considering the damping effect. Preliminary results showed that structural damping, which is a measure of energy dissipation, took the structure from a vibrating state to a resting state. In addition, it was concluded that for the definition of the direct integration method to be used by the analyst/designer in structural simulations, two aspects must be considered in dynamic analysis - accuracy and stability.

KEYWORDS: transient analysis; damping; plane truss.

INTRODUÇÃO

Atualmente, a engenharia estrutural vem concebendo sistemas em que a consideração dos efeitos dinâmicos durante o processo de análise é imprescindível. Esses efeitos são usualmente provocados por carregamentos externos tempo-dependentes, como os produzidos por ventos, sismos, atuação de equipamentos, entre outros (Martinelli; Alves, 2018). Um dos principais problemas da engenharia estrutural é resolver a equação

¹ Bolsista do PIBIC FA — F. Araucária / Bolsa Iniciação científica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: eroseasfdm@gmail.com. ID Lattes: <http://lattes.cnpq.br/6413918050356157>.

² Docente no Curso de Engenharia Civil. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: lasouza@utfpr.edu.br. ID Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0388431681382591>.



dinâmica do movimento para sistemas estruturais com comportamento linear e não linear. Procedimentos eficientes para achar a solução desse problema são os algoritmos de integração numérica, em que o domínio do tempo é dividido em intervalos de tempo finitos e pequenos (Rezaiee-Pajand; Hashemian; Bohluly, 2017). Nesse contexto, este trabalho tem por escopo desenvolver um modelo numérico-computacional com o programa livre Scilab (Scilab, 2023) para a análise linear transiente de treliças planas por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF). A solução da equação do movimento, que descreve o problema estrutural, é obtida por meio de dois métodos da família de Newmark, quais sejam, aceleração média constante e aceleração linear. Utiliza-se uma matriz diagonal de massa condensada (Le; Battini; Hjiáj, 2011) nas análises, a qual requer menos espaço de armazenamento e menos esforço computacional. Para verificar a precisão e a eficiência do algoritmo implementado, uma análise dinâmica de um sistema estrutural com duas barras biarticuladas é efetuada sem e com o efeito do amortecimento.

MATERIAIS E MÉTODOS

A equação diferencial ordinária de segunda ordem que governa a resposta dinâmica de um sistema estrutural em termos dos deslocamentos nodais é dada por (Arruda; Moldovan, 2015; Souza, 2023):

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}(t)) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(t) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

sendo \mathbf{F}_{int} o vetor de forças internas, \mathbf{u} o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{C} a matriz de amortecimento, \mathbf{M} a matriz de massa, $\dot{\mathbf{u}}$ o vetor de velocidade, $\ddot{\mathbf{u}}$ o vetor de aceleração e \mathbf{F}_{ext} o vetor forças externas aplicadas em função do tempo t . A solução aproximada do sistema dado em Equação (1), cujas incógnitas são $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{u}}(t)$, é obtida por um esquema de integração numérica. O método implícito mais amplamente utilizado para dinâmica estrutural é o método de Newmark (1959). Para iniciar o método Newmark, $\ddot{\mathbf{u}}(0)$ em $t = 0$ deve ser calculado como (Kim, 2020):

$$\ddot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{F}_{\text{ext}}(0) - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(0) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}(0))]. \quad (2)$$

Para o instante de tempo atual ($t + \Delta t$), as expressões de Newmark para o deslocamento \mathbf{u} e a velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ são dadas por, respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \beta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \right], \quad (3)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t (1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \Delta t \gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}, \quad (4)$$

em que β e γ são constantes referentes ao método de Newmark e Δt é o intervalo de tempo. Na família de Newmark há diversas particularizações no que tange aos valores dessas constantes. Na Tabela 1 são expostos dois métodos dessa família e na Figura 1 é apresentado o pseudoalgoritmo desses métodos, que diferem entre si pelos valores adotados para os parâmetros β e γ . Um modelo bastante simples e recorrente com relação à matriz de massa refere-se ao elemento em que toda massa é transferida diretamente para os seus nós, resultando em uma matriz diagonal, conhecida como matriz de massa condensada (\mathbf{M}_{con}). Essa matriz é descrita pela seguinte equação (Le; Battini; Hjiáj, 2011):

$$\mathbf{M}_{\text{elem}} = \frac{\rho AL}{2} \mathbf{I}_4, \quad (5)$$

em que \mathbf{I}_4 é a matriz identidade de ordem 4. Estruturas sujeitas à excitação dinâmica estão permanentemente cedendo energia para o ambiente. Na ausência de reposição de energia,



a vibração do sistema estrutural é reduzida gradualmente, o que caracteriza o amortecimento. A matriz de amortecimento \mathbf{C} de um elemento finito considerada neste trabalho é proporcional à massa e é definida em função da matriz de massa \mathbf{M} e do coeficiente de amortecimento c_m conforme a seguinte expressão:

$$\mathbf{C} = 2c_m \mathbf{M}, \quad (6)$$

Tabela 1 – Métodos da família de Newmark.

Método	Tipo	β	γ	Ordem de precisão
Aceleração média constante	implícito	1/4	1/2	2
Aceleração linear	implícito	1/6	1/2	2

Fonte: Bathe (2016).

Figura 1 – Pseudoalgoritmo de Newmark.

Casos especiais:

- Método de Aceleração média constante: $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$
- Método de Aceleração linear: $\beta = 1/6$ e $\gamma = 1/2$

1. Cálculos iniciais

$$1.1 \ddot{\mathbf{u}}^{(0)} \leftarrow \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{ext}^{(0)} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{(0)} - \mathbf{K}\mathbf{u}^{(0)})$$

1.2 Selecionar Δt

$$1.3 \mathbf{a}_1 \leftarrow \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad \mathbf{a}_2 \leftarrow \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \mathbf{C} \quad \mathbf{a}_3 \leftarrow \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \mathbf{M} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \mathbf{C}$$

$$1.4 \hat{\mathbf{K}} \leftarrow \mathbf{K} + \mathbf{a}_1$$

2. Cálculos para cada passo de tempo, com $i = 0, 1, 2, \dots$

$$2.1 \hat{\mathbf{F}}_{ext}^{(i+1)} \leftarrow \mathbf{F}_{ext}^{(i+1)} + \mathbf{a}_1 \mathbf{u}^{(i)} + \mathbf{a}_2 \dot{\mathbf{u}}^{(i)} + \mathbf{a}_3 \ddot{\mathbf{u}}^{(i)}$$

$$2.2 \mathbf{u}^{(i+1)} \leftarrow \hat{\mathbf{K}}^{-1} \hat{\mathbf{F}}_{ext}^{(i+1)}$$

$$2.3 \dot{\mathbf{u}}^{(i+1)} \leftarrow \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}^{(i+1)} - \mathbf{u}^{(i)}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{u}}^{(i)} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{u}}^{(i)}$$

$$2.4 \ddot{\mathbf{u}}^{(i+1)} \leftarrow \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}^{(i+1)} - \mathbf{u}^{(i)}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}^{(i)} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{u}}^{(i)}$$

3. Repetir para o próximo passo de tempo. Relocar i por $i+1$ e implementar passos 2.1 a 2.4 para o próximo passo de tempo.

Fonte: Adaptado de Bathe (2016).

A matriz de rigidez elementar \mathbf{k}_{el} é obtida no sistema local de coordenadas por (Bathe, 2016):

$$\mathbf{k}_{el} = \frac{EA}{L} \mathbf{B}, \quad (7)$$

na qual EA é rigidez axial, L é o comprimento da barra e \mathbf{B} é a matriz dada por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

A matriz de rigidez elementar no sistema global de coordenadas \mathbf{K}_{el} é calculada por:

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{T} \mathbf{k}_{el} \mathbf{T}^T, \quad (9)$$

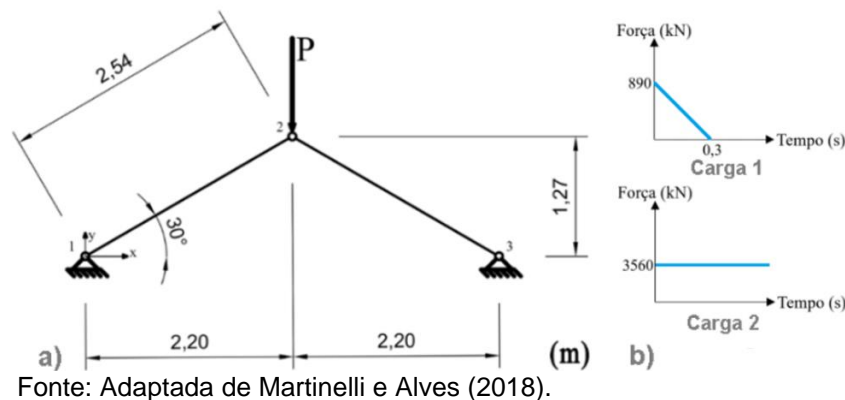
sendo \mathbf{T} a matriz de transformação.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Considere o exemplo de um sistema com duas barras biarticuladas, apresentado em Zhu, Al-Bermani e Kitifwrncha (1994) e Martinelli e Alves (2018), submetido a duas cargas

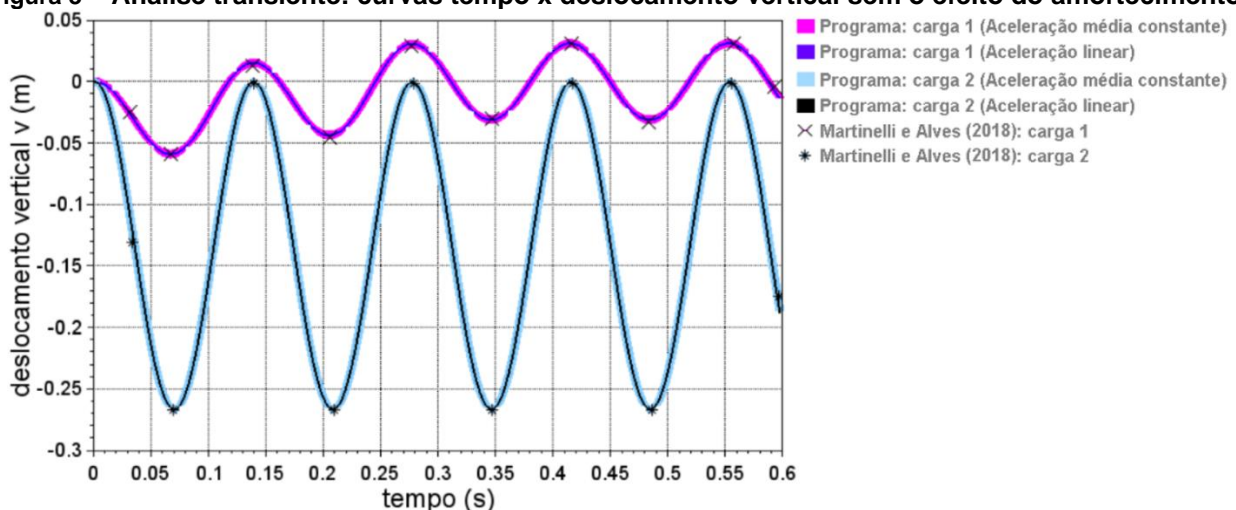
dinâmicas conforme a Figura 2. As barras têm comprimento indeformado $L = 2,54$ m, módulo de elasticidade longitudinal $E = 210$ GPa, área da seção transversal $A = 6,45 \times 10^{-4}$ m² e massa específica $\rho = 7850$ kg/m³. As soluções são obtidas com os métodos da família de Newmark Aceleração média constante ($\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$) e Aceleração linear ($\beta = 1/6$ e $\gamma = 1/2$). Na Figura 3 aparecem as curvas tempo x deslocamento vertical obtidas com o incremento de tempo $\Delta t = 0,00278$ s, havendo boa concordância com os resultados fornecidos por Martinelli e Alves (2018). Na Figura 4, são apresentadas as curvas tempo *versus* deslocamento vertical considerando o efeito do amortecimento ($c_m = 10$). O amortecimento ocasiona a diminuição dos picos do deslocamento na estrutura, uma vez que o amortecimento consiste na transformação da energia dissipada para outra forma de energia e, conseqüentemente, a redução de energia do sistema de vibração. A conservação de energia depende do sistema e de mecanismos físicos que promovem a dissipação. Destaca-se, na Figura 4, que os deslocamentos obtidos na análise dinâmica ao longo do tempo convergem para os deslocamentos obtidos na análise estática.

Figura 2 – Sistema com duas barras: a) Modelo estrutural; e b) cargas dinâmicas.



Fonte: Adaptada de Martinelli e Alves (2018).

Figura 3 – Análise transiente: curvas tempo x deslocamento vertical sem o efeito do amortecimento.



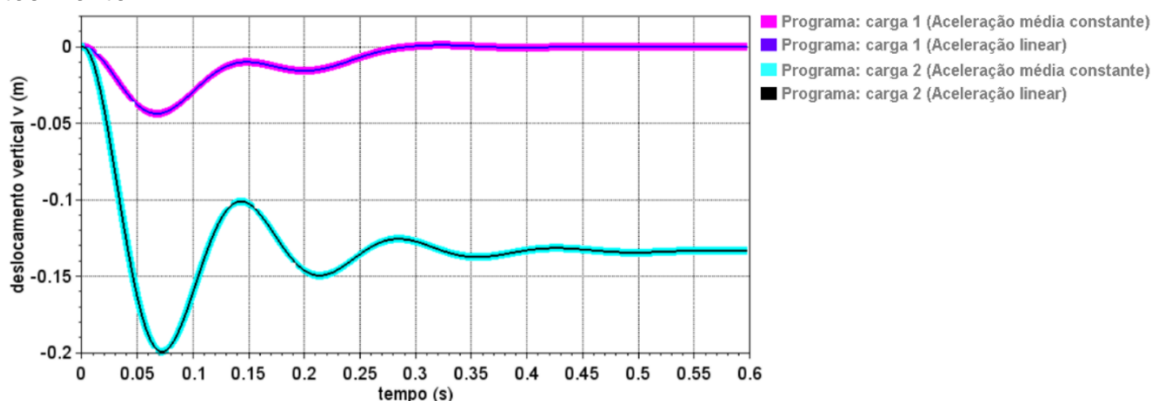
Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

No método de integração direta descrito pelo pseudoalgoritmo na Figura 1, a solução da Equação (1) é obtida passo a passo. A equação do movimento é satisfeita em um ponto de tempo discreto Δt separado no tempo. A solução avança no tempo assumindo variações



de deslocamentos, velocidades e acelerações dentro do intervalo Δt . Vê-se a importância em se adotar intervalos de tempo Δt adequados, uma vez que a discretização temporal está diretamente ligada com a estabilidade e/ou a precisão da resposta do algoritmo (Cavalcante; Maciel; Greco, 2018). A escolha da matriz de massa também tem relevância, haja vista que sua escolha de forma equivocada pode acarretar em resultados incoerentes (Le; Battini; Hjiáj, 2011). Os algoritmos implícitos tendem a ser numericamente estáveis, permitindo a consideração de grandes passos de tempo. No entanto, o custo computacional por passo de tempo na análise dinâmica é alto e as exigências de armazenamento tendem a aumentar drasticamente com o tamanho da malha de Elementos Finitos. Por fim, para a definição do método de integração direta a ser utilizado pelo analista/projetista em simulações estruturais, dois aspectos devem ser considerados na análise dinâmica - a precisão e a estabilidade. Aquele diz respeito à acurácia da resposta numérica, e este tem relação com o comportamento do algoritmo e o acúmulo de erros ao longo de incrementos de tempo.

Figura 4 – Análise transiente: curvas tempo x deslocamento vertical com o efeito do amortecimento.



Fonte: Elaborada pelos autores (2023).

CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou o pseudoalgoritmo de dois métodos implícitos da família de Newmark, que são Aceleração média constante e Aceleração linear, para a análise linear dinâmica de treliças planas por meio do MEF, considerando ou não o efeito do amortecimento. Os resultados do sistema com duas barras mostraram que o amortecimento estrutural, que é uma medida de dissipação de energia, conduziu a estrutura de um estado vibratório para um estado em repouso. A dissipação de energia é um fenômeno complexo devido aos inúmeros aspectos que influenciam sua quantificação. Em virtude disso, a matriz de amortecimento, em geral, é estabelecida utilizando as matrizes de massa e/ou de rigidez dos elementos. No modelo apresentado neste trabalho, utilizou-se uma aproximação simplista em que a matriz de amortecimento é proporcional à matriz de massa, por meio da introdução de um coeficiente de amortecimento. Como sugestões de pesquisa futura, têm-se: a implementação da não linearidade geométrica por meio da formulação corrotacional do MEF; a implementação da não linearidade material fazendo uso das teorias da Elastoplasticidade e da Mecânica do Dano; a consideração de outras aproximações para as matrizes de massa e de amortecimento; e a resolução da equação do movimento por outros métodos implícitos, como WBZ- α , HHT- α e α -Generalizado.



Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação Araucária pelo apoio financeiro (FA — F. Araucária / Bolsa Iniciação científica).

Conflito de interesse

Os autores declaram que não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

ARRUDA, M. R. T.; MOLDOVAN, D. I. On a mixed time integration procedure for non-linear structural dynamics. **Engineering Computations**, v. 32, n. 2, p. 329-369, 2015.

BATHE, K. J. **Finite element procedures**. 2ª Ed. Watertown, MA: Klaus-Jurgen Bathe, 2016.

CAVALCANTE, J. P. B.; MACIEL, D. N.; GRECO, M. Impact response of flying objects modeled by Positional Finite Element Method. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 18, n. 06, p. 1850076, 2018.

KIM, W. An improved implicit method with dissipation control capability: The simple generalized composite time integration algorithm. **Applied Mathematical Modelling**, v. 81, p. 910-930, 2020.

LE, T.-N.; BATTINI, J.-M.; HJIAJ, M. Efficient formulation for dynamics of corotational 2D beams. **Computational Mechanics**, v. 48, p. 153-161, 2011.

MARTINELLI, L. B.; ALVES, E. C. Programa computacional para análise dinâmica de estruturas treliçadas. In: Simpósio de Mecânica Computacional, XIII SIMMEC, UFES, Campus Goiabeiras, Vitória, ES, 2018. **Anais...** Vitória, XIII SIMMEC, 2018.

NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, Vol. 85, n. 3, p. 67-94, 1959.

REZAIEE-PAJAND, M.; HASHEMIAN, M.; BOHLULY, A. A novel time integration formulation for nonlinear dynamic analysis. **Aerospace Science and Technology**, v. 69, p. 625-635, 2017.

SCILAB, versão 2023.0.0. Dassault Systèmes, Vélizy-Villacoublay, France, 2023.

SOUZA, L. A. F. Análise dinâmica não linear de vigas por meio da formulação corrotacional do MEF. **Revista de Engenharia e Tecnologia**, v. 15, n. 1, 2023.

ZHU, K.; AL-BERMANI, F. G. A.; KITIPORNCHAI, S. Nonlinear dynamic analysis of lattice structures. **Computers & structures**, v. 52, n. 1, p. 9-15, 1994.