



Modelo Dinâmico de um Quarto de Roda

Quarter wheel dynamic model

Gustavo Freitas Soares¹, Hércules Alves de Oliveira Junior²

RESUMO

O modelo dinâmico de um quarto de roda abordada no presente trabalho, é amplamente estudada para auxiliar no desenvolvimento de sistemas de amortecimento veicular, levando a um maior conforto para os usuários do veículo e maior estabilidade na condução do mesmo. Para a montagem das equações considerou-se a massa da roda, a massa do chassi e fez-se o balanço de forças envolvidos nesse sistema, igualando força com massa multiplicada pela aceleração. Cada vetor do diagrama de forças foi expandido em equações com as variáveis correspondentes aos coeficientes de amortecimento lineares e não lineares do chassi e da mola. O objetivo desse estudo foi encontrar os pontos de equilíbrio, popularmente chamados de “nós”, e para tal foram feitas as derivações de cada equação expandida em função das quatro variáveis de estado envolvidas. Ao final foram feitas as jacobianas de cada um dos seis casos possíveis, considerando que o uso do módulo da função sinal gera dois possíveis resultados.

PALAVRAS-CHAVE: Dinâmica; Não-linear; Roda; Forças.

ABSTRACT

The quarter wheel dynamic model addressed in the present work is widely studied to assist in the development of vehicle shock absorbing systems, leading to greater comfort for vehicle users and greater stability for the driver. For the assembly of the equations, the mass of the wheel and the mass of the chassis were taken into consideration, and a balance of forces involved in this system was made, equating force with mass multiplied by acceleration. Each vector of the force diagram was expanded into equations with the variables corresponding to the linear and non-linear shock absorbing coefficients of the chassis and spring. The objective of this study was to find the equilibrium points, popularly called “nodes”, and for this purpose, derivations of each expanded equation were made as a function of the four state variables involved. At the end, the Jacobians of each of the six possible cases were made, considering that the use of the module of the signal function generates two possible results.

KEYWORDS: Dynamics; Non-linear; Wheel; Forces.

INTRODUÇÃO

O modelo dinâmico de um quarto de roda é um conceito central na engenharia automotiva, desempenhando um papel crucial na compreensão e otimização do comportamento de uma única roda de um veículo em movimento. Esta abordagem é essencial para o desenvolvimento de sistemas de suspensão, direção e tração, bem como para garantir a segurança, o desempenho e a eficiência durante a condução. Neste trabalho, exploraremos os princípios subjacentes a esse modelo, examinaremos suas aplicações práticas e destacaremos sua relevância na indústria automobilística, contribuindo para o avanço de veículos mais seguros e eficazes.

MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia adotada para elaboração do estudo foi a revisão da literatura a respeito da dinâmica veicular e a base teórica de um estudo anterior (Emerenciano, 2017, p.27). A pesquisa utilizou da análise crítica dos assuntos abordados nos trabalhos revistos

¹ Bolsista da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Paraná, Brasil. E-mail: gsoares.2020@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 8630396845013703.

² Docente no Departamento de Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Paraná, Brasil. E-mail: haoj02@gmail.com. ID Lattes: 6668800910212964.



para a filtragem do material a ser selecionado como embasamento teórico do presente estudo. Para continuidade da abordagem foram desenvolvidos cálculos utilizando a revisão da literatura a respeito da mecânica clássica (GOLDSTEIN, 2002) e fundamentos da física (HALLIDAY, 2002).

O presente trabalho tratou da análise e estudo dos pontos de equilíbrio e dinâmica da roda. Para auxílio do estudo foi utilizado o software solidworks criando a modelagem do sistema de amortecimento, contemplando roda, pistão do amortecedor e ligação com o chassi.

Foram utilizados valores de referência para os cálculos nos quais foram atribuídos valores às constantes, porém para as deduções, não foram utilizados valores numéricos.

A partir da derivação parcial das equações de estado (em relação a cada uma das variáveis de estado: x_1, x_2, x_3, x_4) foi criada a matriz A (Jacobiana) de representação da seguinte equação:

$$\dot{x} = Ax + G(x) + Bu \text{ (Emerenciano, 2017, p.32).}$$

Os maiores empecilhos para o desenvolvimento do trabalho foram a fase de testes das equações para que contemplassem os componentes lineares e não lineares, mesmo após a derivação. Para garantir o sucesso desses cálculos foram calculados 6 casos, incluindo os valores variáveis contemplando o emprego do módulo nas equações.

Para validação dos cálculos foram utilizados a plataforma Symbolab. (Symbolab, 2023).

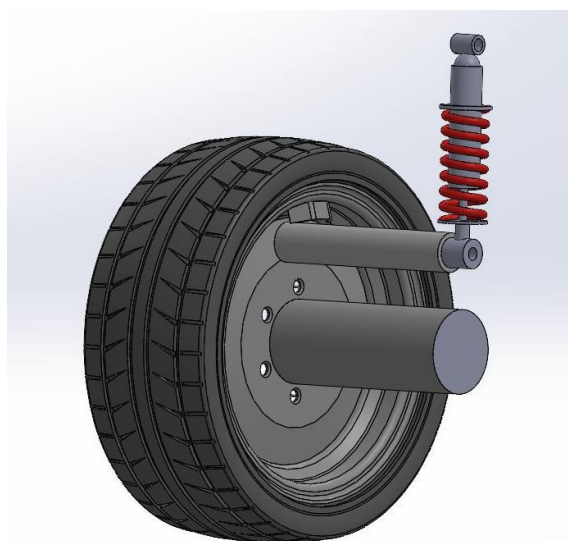
RESULTADOS E DISCUSSÕES

É observado que a descrição da dinâmica de uma roda de veículo pode ser representada matematicamente mediante a aplicação do Princípio Fundamental da Dinâmica, que relaciona o produto da massa da roda com a sua aceleração.

$$F_R = ma = m\ddot{x} \tag{1}$$

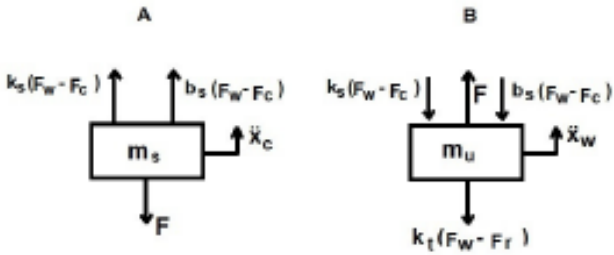
A presente equação foi aplicada ao diagrama de forças do sistema, resultando na derivação de expressões algébricas que se relacionam com as variáveis das massas, bem como os parâmetros dos coeficientes associados à faixa de atuação da mola e do amortecedor.

Figura 1 – Modelagem de sistema roda-amortecedor



Fonte: Autoria própria

Figura 2 – Diagrama de forças envolvidas no sistema



Fonte: Autoria própria

Portanto, temos que:

$$m_c \ddot{x}_c = b_s(\dot{x}_w - \dot{x}_c) + k_s(x_w - x_c) - F \quad (2)$$

Para a massa do chassi:

$$m_r \ddot{x}_w = -b_s(\dot{x}_w - \dot{x}_c) + k_s(x_w - x_c) - k_t(x_w - x_r) + F \quad (3)$$

E

$$k_s(x_w - x_c) = k_s^l(x_w - x_c) + k_s^{nl}(x_w - x_c)^3 \quad (4)$$

$$b_s(\dot{x}_w - \dot{x}_c) = b_s^l(\dot{x}_w - \dot{x}_c) - b_s^y |\dot{x}_w - \dot{x}_c| + b_s^{nl} \sqrt{\dot{x}_w - \dot{x}_c} \operatorname{sgn}(\dot{x}_w - \dot{x}_c) \quad (5)$$

Fazendo as substituições temos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_c \\ x_2 &= \dot{x}_c \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x}_c \\ x_3 &= x_w \\ x_4 &= \dot{x}_w \\ \dot{x}_4 &= \ddot{x}_w \\ w &= x_r \\ u &= F \end{aligned}$$

Cálculos:

Matriz A

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-ks^l}{ms} & \frac{-bs^l}{ms} & \frac{ks^l}{ms} & \frac{bs^l}{ms} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{ks^l}{mu} & \frac{bs^l}{mu} & \frac{-(ks^l+kt)}{mu} & \frac{-bs^l}{mu} \end{bmatrix}$$

Substituição dos termos:

$$ks^l = T; bs^l = V; ms = R; mu = P; kt = Q; bs^y = Z; ks^{nl} = S$$

Logo, temos que:

Matriz A

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-T}{R} & \frac{-V}{R} & \frac{T}{R} & \frac{V}{R} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{T}{P} & \frac{V}{P} & \frac{-(T+Q)}{P} & \frac{V}{P} \end{bmatrix}$$



Para calcular os autovalores e autovetores precisamos encontrar x_1 e x_3 nas equações originais:

$$x_2 = 0 = x_4, \text{ logo} \\ \dot{X}_2 = \frac{-ks^l}{ms}x_1 + \frac{ks^l}{ms}x_3 + \frac{ks^{nl}}{ms}(x_3 - x_1)^3 - \frac{u}{ms} = 0 \quad (6)$$

Aplicando a substituição:

$$\dot{X}_2 = \frac{-T}{R}x_1 + \frac{T}{R}x_3 + \frac{S}{R}(x_3 - x_1)^3 - \frac{u}{R} = 0 \quad (7)$$

$$\dot{X}_4 = \frac{T}{P}x_1 - \frac{(T-Q)}{P}x_3 + \frac{S}{P}(x_3 - x_1)^3 + \frac{Q}{P}W + \frac{u}{P} = 0 \quad (8)$$

Consideramos $(x_3 - x_1)^3 = 0$, portanto

$$\frac{-T}{R}x_1 + \frac{T}{R}x_3 - \frac{u}{R} = 0$$

$$x_3 = \frac{u}{R} + \frac{T}{R}x_1 = \frac{u}{T} + x_1 \quad (9)$$

E para descobrir x_1 temos que fazer a substituição em:

$$\frac{T}{P}x_1 - \frac{(T-Q)}{P}x_3 + \frac{Q}{P}W + \frac{u}{P} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{T}{P}x_1 - \frac{(T-Q)}{P}\left[\frac{u}{T} + x_1\right] + \frac{QW}{P} + \frac{u}{P} = 0 \quad (11)$$

$$x_1 = -W - \frac{u}{T} \quad (12)$$

Portanto,

$$x_3 = -W \quad (13)$$

Com x_1 e x_3 determinados passamos para a construção da Jacobiana:

Usando $\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_4}$ Para cada uma das linhas da matriz

$$\text{Caso 1 } \text{sgn}(x_4 - x_2) = -1, \text{ se } (x_4 - x_2) > 0 ; x_1 = -W - \frac{u}{T} \text{ e } x_3 = -W \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{T}{R} - \frac{6S}{R}x_3 & -\frac{V}{R} + \frac{Z}{R} + \frac{N \text{ abs}'(x_4 - x_2)}{R \sqrt{|x_2 - x_4|}} & \frac{T}{R} - \frac{6S}{R}x_1 & \frac{V}{R} - \frac{Z}{R} + \frac{N \text{ abs}'(x_4 - x_2)}{R \sqrt{|x_2 - x_4|}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{T}{P} - \frac{6S}{P}x_3 & \frac{V}{P} - \frac{Z}{P} - \frac{N \text{ abs}'(x_4 - x_2)}{P \sqrt{|x_2 - x_4|}} & -\frac{(T+Q)}{P} - \frac{6S}{P}x_1 & -\frac{V}{P} + \frac{Z}{P} - \frac{N \text{ abs}'(x_4 - x_2)}{P \sqrt{|x_2 - x_4|}} \end{bmatrix}$$

Fazendo as substituições de x_1 e x_3 encontrados:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{T}{R} + \frac{6S}{R}W & -\frac{V}{R} + \frac{Z}{R} + \frac{N \text{ abs}'(x_4 - x_2)}{R \sqrt{|x_2 - x_4|}} & \frac{T}{R} - \frac{6S}{R}\left(-W - \frac{u}{T}\right) & \frac{V}{R} - \frac{Z}{R} + \frac{N \text{ abs}'(x_4 - x_2)}{R \sqrt{|x_2 - x_4|}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{T}{P} + \frac{6S}{P}W & \frac{V}{P} - \frac{Z}{P} - \frac{N \text{ abs}'(x_4 - x_2)}{P \sqrt{|x_2 - x_4|}} & -\frac{(T+Q)}{P} + \frac{6S}{P}\left(-W - \frac{u}{T}\right) & -\frac{V}{P} + \frac{Z}{P} - \frac{N \text{ abs}'(x_4 - x_2)}{P \sqrt{|x_2 - x_4|}} \end{bmatrix} \quad (15)$$



O processo é repetido para os casos seguintes com variação do valor da função sinal.

Caso 2 $\text{sgn}(x_4 - x_2) = 1$, se $(x_4 - x_2) < 0$; $x_1 = -W - \frac{u}{T}$ e $x_3 = -W$ e $|x_4 - x_2|' = -1$ (16)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{T}{R} + \frac{6S}{R}W & -\frac{V}{R} + \frac{Z}{R} + \frac{N \text{abs}'(x_4 - x_2)}{R \sqrt{|x_2 - x_4|}} & \frac{T}{R} - \frac{6S}{R}(-W - \frac{u}{T}) & \frac{V}{R} + \frac{Z}{R} - \frac{N \text{abs}'(x_4 - x_2)}{R \sqrt{|x_2 - x_4|}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{T}{P} + \frac{6S}{P}W & \frac{V}{P} - \frac{Z}{P} - \frac{N \text{abs}'(x_4 - x_2)}{P \sqrt{|x_2 - x_4|}} & -\frac{(T+Q)}{P} + \frac{6S}{P}(-W - \frac{u}{T}) & -\frac{V}{P} - \frac{Z}{P} - \frac{N \text{abs}'(x_4 - x_2)}{P \sqrt{|x_2 - x_4|}} \end{bmatrix}$$

Caso 3 $\text{sgn}(x_4 - x_2) = 1$, se $(x_4 - x_2) < 0$; $x_1 = -W - \frac{u}{T}$ e $x_3 = -W$ e $|x_4 - x_2|' = 1$ (17)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{T}{R} + \frac{6S}{R}W & -\frac{V}{R} - \frac{Z}{R} + \frac{N \text{abs}'(x_4 - x_2)}{R \sqrt{|x_2 - x_4|}} & \frac{T}{R} + \frac{6S}{R}(-W - \frac{u}{T}) & \frac{V}{R} - \frac{Z}{R} + \frac{N \text{abs}'(x_4 - x_2)}{R \sqrt{|x_2 - x_4|}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{T}{P} + \frac{6S}{P}W & \frac{V}{P} + \frac{Z}{P} - \frac{N \text{abs}'(x_4 - x_2)}{P \sqrt{|x_2 - x_4|}} & -\frac{(T+Q)}{P} + \frac{6S}{P}(-W - \frac{u}{T}) & -\frac{V}{P} + \frac{Z}{P} - \frac{N \text{abs}'(x_4 - x_2)}{P \sqrt{|x_2 - x_4|}} \end{bmatrix}$$

Caso 4 $\text{sgn}(x_4 - x_2) = 0$, se $(x_4 - x_2) = 0$; $x_1 = -W - \frac{u}{T}$ e $x_3 = -W$ e $|x_4 - x_2|' = -1$ (18)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{T}{R} + \frac{6S}{R}W & -\frac{V}{R} + \frac{Z}{R} & \frac{T}{R} - \frac{6S}{R}(-W - \frac{u}{T}) & \frac{V}{R} - \frac{Z}{R} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{T}{P} + \frac{6S}{P}W & \frac{V}{P} - \frac{Z}{P} & -\frac{(T+Q)}{P} + \frac{6S}{P}(-W - \frac{u}{T}) & \frac{V}{P} - \frac{Z}{P} \end{bmatrix}$$

Caso 5 $\text{sgn}(x_4 - x_2) = -1$, se $(x_4 - x_2) > 0$; $x_1 = -W - \frac{u}{T}$ e $x_3 = -W$ e $|x_4 - x_2|' = 1$ (19)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{T}{R} + \frac{6S}{R}W & -\frac{V}{R} + \frac{Z}{R} - \frac{N \text{abs}'(x_4 - x_2)}{R \sqrt{|x_2 - x_4|}} & \frac{T}{R} - \frac{6S}{R}(-W - \frac{u}{T}) & \frac{V}{R} - \frac{Z}{R} - \frac{N \text{abs}'(x_4 - x_2)}{R \sqrt{|x_2 - x_4|}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{T}{P} + \frac{6S}{P}W & \frac{V}{P} - \frac{Z}{P} + \frac{N \text{abs}'(x_4 - x_2)}{P \sqrt{|x_2 - x_4|}} & -\frac{(T+Q)}{P} + \frac{6S}{P}(-W - \frac{u}{T}) & \frac{V}{P} - \frac{Z}{P} - \frac{N \text{abs}'(x_4 - x_2)}{P \sqrt{|x_2 - x_4|}} \end{bmatrix}$$

Caso 6 $\text{sgn}(x_4 - x_2) = 0$, se $(x_4 - x_2) = 0$; $x_1 = -W - \frac{u}{T}$ e $x_3 = -W$ e $|x_4 - x_2|' = 1$ (20)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{T}{R} + \frac{6S}{R}W & -\frac{V}{R} - \frac{Z}{R} & \frac{T}{R} - \frac{6S}{R}(-W - \frac{u}{T}) & \frac{V}{R} - \frac{Z}{R} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{T}{P} + \frac{6S}{P}W & \frac{V}{P} + \frac{Z}{P} & -\frac{(T+Q)}{P} + \frac{6S}{P}(-W - \frac{u}{T}) & -\frac{V}{P} + \frac{Z}{P} \end{bmatrix}$$

Partindo para o cálculo do autovalor e autovetor:

Substituições:



$$a = \sqrt{|x_2 - x_4|}$$

$$b = abs'(x_4 - x_2)$$

Logo:

$$\frac{a^2 \lambda^4 PRT + a^2 \lambda^2 PT(\lambda V - \lambda Z - 6SW + T) + 6a^2 \lambda^2 RSu + a^2 \lambda^2 RT(-\lambda V + \lambda Z + Q + 6SW + T)}{a^2 PRT}$$

-

$$\frac{72a^2 S^2 uW + Ta^2(-2\lambda^2 V^2 + 4\lambda^2 VZ - 2\lambda^2 Z^2 + \lambda QV - \lambda QZ)}{a^2 PRT}$$

+

$$\frac{Ta^2(-6QSW + QT - 72S^2 W^2 + 12SW + 2T^2)}{a^2 PRT}$$

(21)

Conclusões

O resultado do estudo foi obtido através da derivação parcial das equações de estado (em relação a cada uma das variáveis de estado: x_1, x_2, x_3, x_4) foi criada a matriz A (Jacobiana) de representação da seguinte equação:

$$\dot{x} = Ax + G(x) + Bu \text{ (Emerenciano, 2017, p.32).}$$

Enunciando a dependência da estabilidade do sistema veicular com os coeficientes de atuação linear da mola, massa do chassi, massa do eixo da roda, velocidade de deslocamento do chassi e posição do eixo da roda.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Ponta Grossa por ter proporcionado essa oportunidade de crescimento acadêmico e de expansão das áreas de conhecimento e pelo incentivo de bolsa.

Gostaria de agradecer ao Professor Hércules pela oportunidade e pela confiança.

Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

Emerenciano Nunes de Oliveira, Fernando. Controles semiativos e observador de estados não linear aplicados em suspensão veicular com amortecedor magneto-reológico. 2017. 149. Dissertação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical mechanics**. San Francisco: Addison Wesley, 2002.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física**. Rio De Janeiro: Livros Técnicos E Científicos, 2002.

Symbolab, 2023. Disponível em: <<https://pt.symbolab.com/>>. Acesso em: 30, agosto 2023.