Análise de erros de discretização em problemas unidimensionais de vibrações livres utilizando o Método dos Elementos Finitos

Analysis of discretization errors in one-dimensional free vibration problems using the Finite Element Method

Fernanda Domingues Biagi[1], João Luiz do Vale[2], Jéderson da Silva[3]

RESUMO

O estudo de sistemas mecânicos envolvendo vibrações mostra-se relevante em razão da sua ampla aplicação. Devido complexidade das estruturas, normalmente não se dispõe de soluções analíticas, com isso, uma alternativa é a aplicação de métodos numéricos juntamente com avaliação da qualidade da solução aproximada obtida. O presente trabalho avalia um estimador de erro *a posteriori*, fundamentado na recuperação de um campo de deslocamentos associado a uma determinada frequência natural e seu respectivo modo de vibrar aplicado em um problema de vibrações livres, unidimensional, elástico, linear e contínuo. O problema estudado é de uma barra engastada-livre, o qual apresenta solução analítica. Com o erro verdadeiro avaliado, é possível determinar o índice de efetividade, parâmetro de medida de qualidade de estimadores de erro, considerando uma análise de todos os graus de liberdade associados a uma dada discretização, sendo utilizado o *software* Matlab® para implementação numérica. Os resultados obtidos mostram valores de índice de efetividade tendendo a unidade para os primeiros modos e garante uma melhor exatidão da solução recuperada, por possuir um grau acima das funções Lagrangianas originais, comparando com as soluções aproximadas via funções Lagrangianas lineares e quadráticas. Percebe-se também o aumento dos erros de aproximação para modos de vibrar elevados.
PALAVRAS-CHAVE: estimador de erro; frequência natural; índice de efetividade; modos de vibrar.

ABSTRACT

The study of mechanical systems involving vibrations is relevant due to its wide application. Due to the complexity of the structures, analytical solutions are not normally available, therefore, an alternative is to apply numerical methods together with evaluating the quality of the approximate solution obtained. The present work evaluates an a posteriori error estimator, based on the recovery of a displacement field associated with a given natural frequency and its respective mode of vibration applied to a one-dimensional, elastic, linear and continuous free vibration problem. The problem studied is that of a fixed-free bar, which presents an analytical solution. With the true error evaluated, it is possible to determine the effectiveness index, a quality measurement parameter for error estimators, considering an analysis of all degrees of freedom associated with a given discretization, using Matlab® software for numerical implementation. The results obtained show effectiveness index values tending towards unity for the first modes and guarantees better accuracy of the recovered solution, as it is one degree above the original Lagrangian functions, compared to the approximate solutions via linear and quadratic Lagrangian functions. It is also possible to notice an increase in approximation errors for high vibration modes.
KEYWORDS: error estimator; natural frequency; effectiveness index; vibrate modes.

[1] Voluntária do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação científica e desenvolvimento tecnológico. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: fernandabiagi@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 8780134971030997.

[2] Docente no Departamento Acadêmico de Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: joaovale@utfpr.edu.br. ID Lattes: 7658042992367037.

[3] Docente no Departamento Acadêmico de Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: jedersonsilva@utfpr.edu.br. ID Lattes: 5533392319665406.

INTRODUÇÃO

Com o contínuo avanço da engenharia, é cada vez mais necessário o estudo de problemas envolvendo vibrações de estruturas para avaliar e evitar o fenômeno da ressonância. Nesse contexto, a maioria dos sistemas possuem grande complexidade, tornando inviável a obtenção de soluções analíticas para os modelos analisados, sendo necessário o estudo de métodos matemáticos de aproximação. Dentre os métodos numéricos de aproximação, o Método dos Elementos Finitos (MEF) vem sendo utilizado para análise modal em problemas de vibrações e, por ser um método de aproximação, há erros intrinsicamente vinculados à solução (REDDY, 2006, p. 199). No presente trabalho o foco são os erros de discretização, os quais são provenientes da utilização de funções de interpolação, em geral, polinomiais que buscam aproximar a solução analítica.

Existem dois tipos fundamentais de estimativas para o erro de discretização associado ao MEF: *a priori* e *a posteriori*. Os estimadores de erro *a posteriori*, objetos de estudo do presente trabalho, utilizam dados da própria solução aproximada para obtenção de uma estimativa do erro, podendo ser dividida em estimadores de erro baseados em resíduo e baseados em recuperação. Para o cálculo da solução recuperada, os estimadores de erro *a posteriori* são baseados na diferença entre os valores aproximados obtidos via MEF com os valores recuperados, que podem ser calculados por diversos métodos de recuperação. Uma abordagem refere-se à proposta de Hager e Wiberg (1999) na qual explora-se um método de recuperação de deslocamentos mediante padrões de elementos com a avaliação da super-convergência em pontos nodais do domínio denominada *Superconvergent Patch Recovery Displacement* (SPRD).

O presente trabalho tem como objetivo analisar um estimador de erro através do cálculo do erro estimado e do índice de efetividade em um problema de engenharia que possui solução analítica, visando obter uma melhor solução considerando todo o espectro de frequências naturais e modos de vibrar do problema estudado. O modelo estudado consiste em uma barra engastada-livre contínua analisada no contexto de vibração livre não amortecida. Este problema foi escolhido por possuir solução analítica e possibilitar explorar diferentes aspectos da aproximação de modo acessível e mais simples que em problemas com duas ou três dimensões.

MATERIAIS E MÉTODOS

O presente trabalho trata sobre um problema mecânico de uma barra engastada-livre, unidimensional e contínua tendo como objetivo inicial a determinação das frequências naturais e dos modos de vibrar de forma analítica e através do MEF. Nesse problema, é possível encontrar analiticamente as frequências naturais e os modos de vibrar conforme demonstrado por Mendonça e Francello (2019). Outra forma de obter a solução é por meio da análise modal via MEF em que, para encontrar soluções aproximadas para o problema, realiza-se uma discretização do domínio em elementos finitos. De acordo com Rao (2009), para a análise modal, utiliza-se a solução de um problema de autovalor e autovetor generalizado, ou seja,

$$(\mathbf{K_G} + \boldsymbol{\lambda}^M \mathbf{M_G})\mathbf{U} = \mathbf{0} \text{ , com } \boldsymbol{\lambda}^M = (\boldsymbol{\omega}^M)^2 \text{ ,} \qquad (1)$$

onde $\mathbf{K_G}$ é a matriz de rigidez global, $\mathbf{M_G}$ a matriz de massa global, $\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{M}}$ é a matriz diagonal com todos os autovalores, os quais retratam as frequências naturais ao quadrado e **U** é a matriz contendo os autovetores representando os modos de vibrar associados a cada frequência. Para encontrar as matrizes de massa e rigidez global, realiza-se uma superposição das matrizes de cada elemento (FISH e BELYTSCHKO, 2009, p.88), como:

$$\mathbf{M_G} = \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \rho \, \mathbf{N} \, d\Omega_e \quad \text{e} \quad \mathbf{K_G} = \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega_e} (\mathbf{dN})^{\mathbf{T}} A \, E \, (\mathbf{dN}) \, d\Omega_e. \tag{2}$$

O somatório é feito desde o primeiro elemento até o número total de elementos (Nel), a variável A representa a área da seção transversal, E o módulo de elasticidade longitudinal, ρ a densidade, **N** a matriz de funções de forma e **dN** a matriz de derivadas das funções de forma as quais dependem de uma integração ao longo do domínio de cada elemento (Ω_e). A formulação apresentada no presente trabalho é pautada no artigo de Hager e Wiberg (1999) e, neste caso, é apresentado a formulação aplicada a um problema unidimensional. Considerando um problema de vibrações livres, a determinação de uma i-ésima frequência natural aproximada via MEF (ω_i^M) e outra analítica (ω_i^A) é possível calcular o erro verdadeiro. Porém, em geral não é possível calcular o erro verdadeiro (η) pois muitos dos problemas de engenharia não possuem solução analítica conhecida e, para isso, é necessário calcular um erro estimado (η^*). Sendo assim:

$$\eta(\%) = \left(\frac{\omega_i^M - \omega_i^A}{\omega_i^A}\right) 100 \quad \text{e} \quad \eta^*(\%) = \left(\frac{\omega_i^M - \omega_i^*}{\omega_i^*}\right) 100\,, \tag{3}$$

onde ω_i^* é a i-ésima frequência natural recuperada do sistema. Para encontrar os valores recuperados da frequência natural, calcula-se o coeficiente de Rayleigh como:

$$\lambda_i^* = \frac{\sum_e \int_{\Omega_e} (\nabla \mathbf{u}_i^*)^{\mathbf{T}} \, E \, A \, (\nabla \mathbf{u}_i^*) \, d\Omega_e}{\sum_e \int_{\Omega_e} (\mathbf{u}_i^*)^{\mathbf{T}} \, \rho_e \, (\mathbf{u}_i^*) \, d\Omega_e}, \text{ com } \lambda_i^* = (\omega_i^*)^2. \tag{4}$$

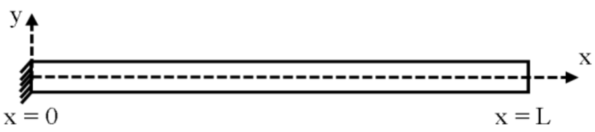
Aqui λ_i^* representa um autovalor recuperado, $\mathbf{u}_i^*$ representa os modos de vibrar recuperados e $\nabla \mathbf{u}_i^*$ o gradiente dos modos de vibrar recuperado, em que ambos estão associados a uma dada frequência natural. Uma alternativa é obter o campo melhorado via mínimos quadrados com base em pontos super-convergentes considerando características não locais, com isso, para o cálculo dos modos de vibrar recuperados, define-se um padrão (*patch*) que contém três elementos, onde no elemento central será calculado os deslocamentos $\mathbf{u}_i^*$, levando em consideração as informações dos elementos adjacentes. A formulação de forma explícita e detalhada é mostrada no trabalho de Hager e Wiberg (1999), onde é tratada a implementação e teoria do estimador de erro para um problema plano. Neste trabalho, é admitido uma solução aproximada para um problema unidimensional obtida via MEF com funções Lagrangianas lineares sendo que a solução recuperada de deslocamento encontrada terá a forma quadrática. Por fim, para avaliar a qualidade do estimador de erro, calcula-se o índice de efetividade, que é dado por:

$$\theta = \frac{\omega_i^M - \omega_i^*}{\omega_i^M - \omega_i^A}. \qquad (5)$$

Neste caso, o índice θ representa a razão entre o erro estimado e o erro verdadeiro. Assim, valores próximos a unidade indicam um bom desempenho do estimador de erro.

O trabalho propõe uma análise de um estimador de erro para um problema de vibração livre de um modelo unidimensional de uma barra engastada a esquerda e livre a direita (Figura 1).

Figura 1 – Modelo de uma barra engastada-livre unidimensional



Fonte: O próprio autor

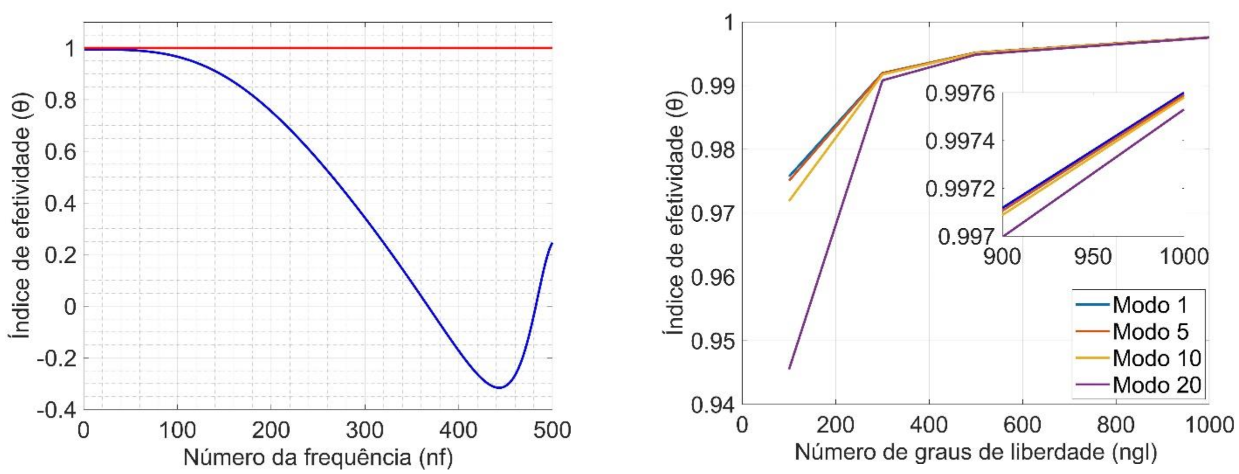
Todos os experimentos e cálculos deste trabalho são feitos utilizando o *software Matlab*®. Neste problema, considerou-se uma barra com comprimento $L = 1\ [m]$, densidade $\rho = 1\ [Kg/m^3]$, área $A = 1\ [m^2]$ e módulo de elasticidade de $E = 1\ [Pa]$. Por fim, obtém-se valores de índice de efetividade através da Equação 5 e, para avaliação da qualidade do estimador de erro, são elaborados gráficos variando os graus de liberdade e comparando o erro verdadeiro com o estimado. Um último gráfico é feito a fim de confrontar o erro relativo verdadeiro para três soluções: aproximação via MEF linear, via MEF quadrático e via SPRD, para uma malha de 500 elementos.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com os valores de frequência natural e modos de vibrar obtidos de forma analítica, via MEF e via SPRD, calcula-se o índice de efetividade por meio da Equação 5 e, com isso, tem-se as Figuras 2 com o objetivo de avaliar a qualidade do estimador de erro estudado.

Figura 2 – Avaliação do estimador de erro para: a) Funções Lagrangianas lineares em uma malha de 500 elementos considerando todo o espectro de frequências. (b) Diferentes malhas considerando diferentes modos de vibrar analisando a qualidade com a variação da malha.

a) b)

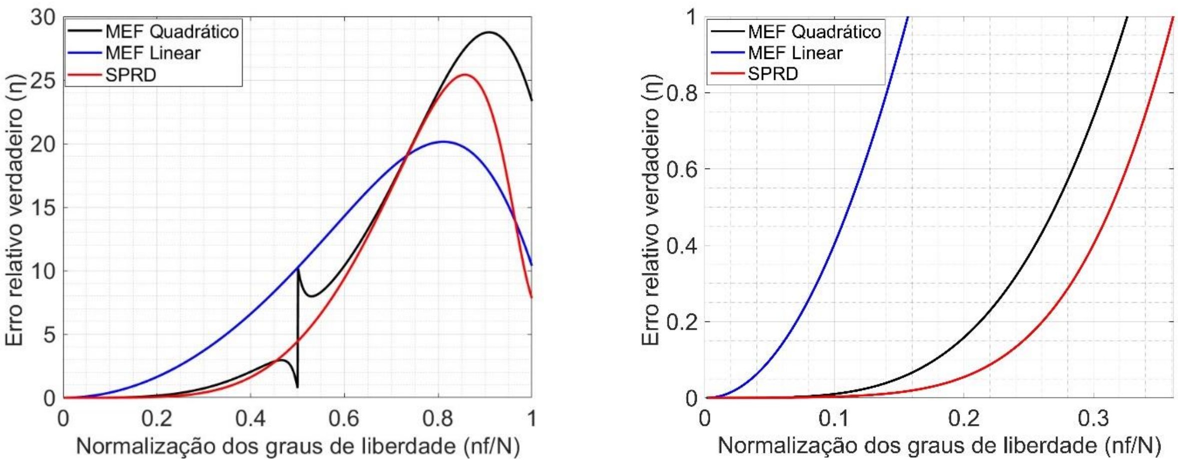


Fonte: O próprio autor

Na Figura 2a, a linha vermelha horizontal representa uma linha de referência em que a solução recuperada é idêntica a solução analítica. Foi realizado o cálculo do índice de efetividade para todas as frequências em uma malha de 500 elementos, sendo possível observar que as primeiras 145 frequências possuem um índice maior que 0,90 e as 115 primeiras frequências maior que 0,95. A Figura 2b mostra 4 modos de vibrar diferentes onde é avaliado o índice de efetividade e, constatou-se que os modos observados apresentam um comportamento monotônico crescente da técnica SPRD e, na literatura, esse método de avaliação em problemas unidimensionais não foi encontrado. Para um problema plano, o comportamento monotônico crescente é observado no trabalho de Hager e Wiberg (1999) e esse comportamento corrobora para o problema unidimensional tratado neste trabalho. Analisando em conjunto ambas as figuras, é possível constatar que a primeira frequência e o primeiro modo possuem o melhor erro estimado. Por fim, elabora-se uma figura contendo o erro verdadeiro para uma malha de 500 elementos contendo as aproximações via MEF linear, MEF quadrático e SPRD (Figura 3a e 3b).

Figura 3 – Erro relativo verdadeiro para MEF linear, MEF quadrático e SPRD em uma barra engastada livre com 500 elementos analisando a normalização dos graus de liberdade para: (a) Toda a faixa de erro; (b) Erro de até 1%.

a) b)



Fonte: O próprio autor

A análise da Figura 3 permite observar que a solução aproximada por funções Lagrangianas lineares garante 16% das frequências com um erro abaixo de 1%. Apesar disso, utilizando a solução recuperada tem-se 36% das frequências para o mesmo valor de erro, gerando um ganho de mais de duas vezes ao comparar com a solução via MEF linear. É possível constatar também um ganho ao comparar a solução recuperada com a solução aproximada por funções Lagrangianas quadráticas, sendo que esta garante 33% das frequências. Com isso, é possível concluir que a solução via SPRD é mais eficaz na aproximação das frequências naturais e modos de vibrar que a solução via MEF linear e via MEF quadrático pois o erro relativo verdadeiro via SPRD apresenta uma curva que possui seu comportamento sempre abaixo das curvas das soluções via MEF devido às características não locais que melhoram a solução recuperada.

CONCLUSÃO

No presente trabalho foi desenvolvido a implementação de um problema de vibração livre de uma barra unidimensional e contínua com a determinação de todo o espectro de frequências naturais e modos de vibrar por meio da avaliação de um estimador de erro mediante a recuperação dos deslocamentos através da utilização de mínimos quadrados com informações dos pontos super-convergentes definidos no interior dos padrões. Através das análises feitas para o estimador de erro foi possível concluir que ele possui bons índices de efetividade para os primeiros modos, aproximando a solução recuperada de maneira mais fiel a solução analítica conhecida neste problema. Esse comportamento ocorre, pois, a função original via MEF foi definida com base nas características do elemento e, já a solução via SPRD, mesmo sendo baseada na solução via MEF linear, foi determinada por meio da característica não local atrelada a cada elemento, tendendo a melhorar a solução. Por fim, constatou-se que a solução via SPRD possui exatidões mais elevadas e uma melhor aproximação em comparação com as funções de interpolação Lagrangianas lineares e quadráticas e nota-se também um aumento nos erros de aproximação à medida que os modos de vibrar tornam-se mais elevados

Agradecimentos

Gostaria de expressar meus agradecimentos aos meus estimados professores orientadores, Jéderson da Silva e João Luiz do Vale, pela orientação, apoio e oportunidade.

Disponibilidade de código

O autor optou por não disponibilizar o código alegando uma escolha pessoal quanto à sua distribuição.

Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **Um Primeiro Curso em Elementos Finitos**. Rio de Janeiro, Brasil: LTC, 2009. v. 1. ISBN 978-85-216-1701-3.

HAGER, P.; WIBERG, N. **Adaptive eigenfrequency analysis by superconvergent patch recovery**. Computer methods in applied mechanics and engineering, v. 176, p. 441-462, 1999.

MENDONÇA, P.T.R.; FRANCELLO, E.A. **O Método dos Elementos Finitos aplicado a Mecânica dos Sólidos**. 1 ed. Santa Catarina, Brasil: Orsa Maggiore, 2019. ISBN 978-85-907153-1-3.

RAO, S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009. ISBN 978-85-7605-200-5.

REDDY, J. N. **An introduction to the Finite Element Method**. New York: 3. ed. Mc Graw Hill, 2006.