



Análise de parâmetros de discretização do Método dos Elementos Finitos na aproximação de frequências naturais e modos de vibrar

Parameter analysis of discretization in the Finite Element Method for approximating natural frequencies and vibration modes

Breno Padilha Jacomelli Ventura¹, João Luiz do Vale², Jéderson da Silva³

RESUMO

A ampla aplicação de vibrações na engenharia tem motivado pesquisas recentes nessa área. No entanto, para a grande maioria dos problemas, soluções exatas não estão disponíveis, tornando imprescindível o uso de métodos numéricos, sendo o mais usual, o Método dos Elementos Finitos (MEF). Diante disto, o presente trabalho possui o objetivo de investigar como os parâmetros da discretização do MEF influenciam na aproximação das frequências naturais em um problema de vibração livre não amortecida. Os parâmetros considerados incluem: tipo, tamanho e ordem polinomial dos elementos finitos. Além disso, pretende-se explorar a relação entre a exatidão da solução aproximada com as diferentes configurações das deflexões dinâmicas dos modos de vibração. O problema de engenharia adotado é de uma viga bidimensional engastada na extremidade esquerda, elástica e linear e a simulação é realizada pelo *software* Ansys®, considerando um estado plano de tensão. Os resultados obtidos indicam uma melhor aproximação para os modos predominantemente axiais. Foi observado também que, em comparação aos elementos de ordem linear, os elementos de ordem quadrática apresentam maior exatidão na aproximação. Por fim, constatou-se que os elementos quadrangulares são mais eficientes na aproximação do que os elementos triangulares.

PALAVRAS-CHAVE: Erros de Aproximação; Frequências Naturais; Método dos Elementos Finitos; Modos de Vibrações; Vibração Livre.

ABSTRACT

The broad application of vibrations in engineering has motivated recent research in this field. However, for the vast majority of problems, exact solutions are not available, making it essential to use numerical methods, with the most common being the Finite Element Method (FEM). Therefore, the present study aims to investigate how the discretization parameters of FEM influence the approximation of natural frequencies in an undamped free vibration problem. The considered parameters include type, size, and polynomial order of the finite elements. Additionally, the study aims to explore the relationship between the accuracy of the approximate solution and the different configurations of dynamic deflections in vibration modes. The adopted engineering problem involves a two-dimensional beam fixed at the left end, elastic and linear, and the simulation is carried out using the Ansys® software, considering a plane stress state. The obtained results indicate a better approximation for predominantly axial modes. It was also observed that, compared to linear elements, quadratic elements provide higher accuracy in the approximation. Finally, it was found that quadrangular elements are more efficient in the approximation than triangular elements.

KEYWORDS: Approximation Errors; Natural Frequencies; Finite Element Method; Vibration Modes; Free Vibration.

¹ Voluntário do Programa de Iniciação Científica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: brenopadilhajacomelliventura@gmail.com. ID Lattes: 6425225300869950.

² Docente do Departamento Acadêmico de Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: joaovale@utfpr.edu.br. ID Lattes: 7658042992367037.

³ Docente do Departamento Acadêmico de Engenharia Mecânica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil. E-mail: jedersonsilva@utfpr.edu.br. ID Lattes: 5533392319665406.

INTRODUÇÃO

Diversas atividades humanas e problemas de engenharia envolvem vibrações, dado que vibração é qualquer movimento que se repete após um determinado intervalo de tempo (RAO, 2009). A análise modal de estruturas permite determinar as frequências naturais e os modos de vibração correspondentes. No entanto, uma das maiores dificuldades encontradas na análise modal é que a maioria dos sistemas vibratórios encontrados são de extrema complexidade, para tanto, é viável utilizar métodos de aproximação (SORIANO, 2009).

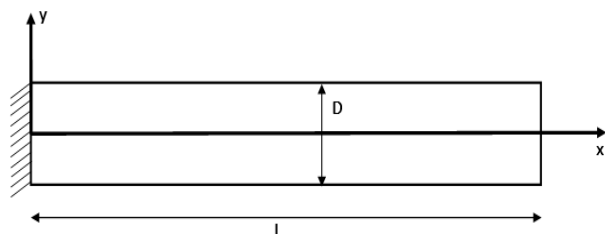
Dentre os métodos de aproximação, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é o mais usual. O MEF consiste em subdividir um corpo em elementos finitos conectados por nós (malha de elementos finitos) para os quais as equações diferenciais parciais que governam o comportamento do problema são resolvidas de maneira numérica (FISH E BELYTCHKO, 2009). Portanto, o método não fornece soluções exatas e sua exatidão depende, além de outras fontes de erro, dos parâmetros de discretização utilizados.

Diante disto, o objetivo deste trabalho é investigar como os parâmetros de discretização do MEF influenciam na aproximação das frequências naturais de modos de vibração iniciais. Serão analisados parâmetros como o tipo, tamanho e ordem polinomial dos elementos finitos. Além disso, pretende-se explorar a relação entre a exatidão da solução aproximada com as diferentes configurações das deflexões dinâmicas dos modos de vibração.

METODOLOGIA

O problema de engenharia proposto é apresentado na Figura 1. O modelo consiste em uma viga engastada, fixada na extremidade esquerda, com comprimento L , largura D e espessura e . Os valores das propriedades mecânicas da viga em balanço, como o módulo de Young, coeficiente de Poisson e massa específica, bem como os parâmetros geométricos, foram extraídos do trabalho de Yang, Xu e Zheng (2016) e são apresentados na Tabela 1.

Figura 1 - Problema de engenharia proposto: viga em balanço.



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Tabela 1 - Propriedades mecânicas e parâmetros geométricos do modelo.

Parâmetros	Valores
Módulo de Young [kgf/mm ²]	$2,1 \cdot 10^4$
Coefficiente de Poisson [-]	0,3
Massa Específica [kgf s ² /mm ⁴]	$8,0 \cdot 10^{-10}$
L [mm]	100
D [mm]	10
e [mm]	1

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).



O problema é simulado como um problema bidimensional em estado plano de tensão e para análise modal utiliza-se o Workbench do *software* Ansys® na versão 2023 R1.

O modelo mecânico apresentado é discretizado, inicialmente, utilizando malhas regulares com um mesmo número de divisões de elementos propostas por Yang, Xu e Zheng (2016), no entanto, utilizando os elementos triangular linear (T3), quadrangular linear (Q4), triangular quadrático (T8) e quadrangular quadrático (Q8).

Na Malha A, o comprimento da viga é dividido por dez partes e sua largura por uma única parte, resultando em 10 elementos quando utiliza-se o elemento quadrangular e 20 elementos quando utiliza-se o elemento triangular. No entanto, o número de nós não apenas varia de acordo com o tipo de elemento, mas também depende da ordem polinomial empregada. Ademais, a razão de aspecto é mantida para malhas subsequentes, ou seja, para a Malha B, a quantidade de divisões é duplicada tanto no comprimento quanto na largura, resultando em um padrão de 20x2. São geradas malhas para os quatro tipos de elementos até uma divisão de 320x32 (Malha F).

São gerados gráficos de convergência do erro estimado para todos os elementos e ordens polinomiais (T3, T6, Q4 e Q8), onde o erro estimado em porcentagem ($\eta(\%)$) é dado pela Equação 1:

$$\eta(\%) = \frac{\omega_{MEF} - \omega_{REF}}{\omega_{REF}} 100, \quad (1)$$

onde, ω_{MEF} são os valores de frequências obtidos nas simulações realizadas neste trabalho e ω_{REF} os valores de frequências adotados como referência. Ressalta-se que, o valor η é uma estimativa de erro pois os valores de referência não são valores analíticos, mas sim, valores apresentados por Liu e Gu (2000) em uma simulação no *software* ABAQUS, com uma malha refinada com 8000 graus de liberdade utilizando elementos quadrangulares.

RESULTADOS

Para validar a simulação, foram comparados os valores obtidos para os três primeiros padrões de malha utilizando o elemento Q4 com os resultados apresentados por Yang, Xu e Zheng (2016). Os valores são idênticos, o que valida as simulações realizadas. No entanto, no presente trabalho, somente os três últimos padrões de malha são considerados, pois eles são capazes de aproximar com bom nível de exatidão os oito primeiros modos de vibrar da viga em balanço, independentemente do tipo de elemento ou ordem polinomial empregados na discretização.

A Figura 2 apresenta uma análise da convergência do erro estimado para os oito primeiros modos de vibração. Para esta análise, foram utilizados os elementos T3, T6, Q4 e Q8 para os três últimos padrões de malha. O cálculo do erro estimado foi realizado pela Equação 1. No eixo da abscissa é apresentado o logaritmo decimal do número de nós (n).

FIGURA 2 - Análise comparativa da convergência do erro estimado em função do logaritmo decimal do número de nós.

(continua)

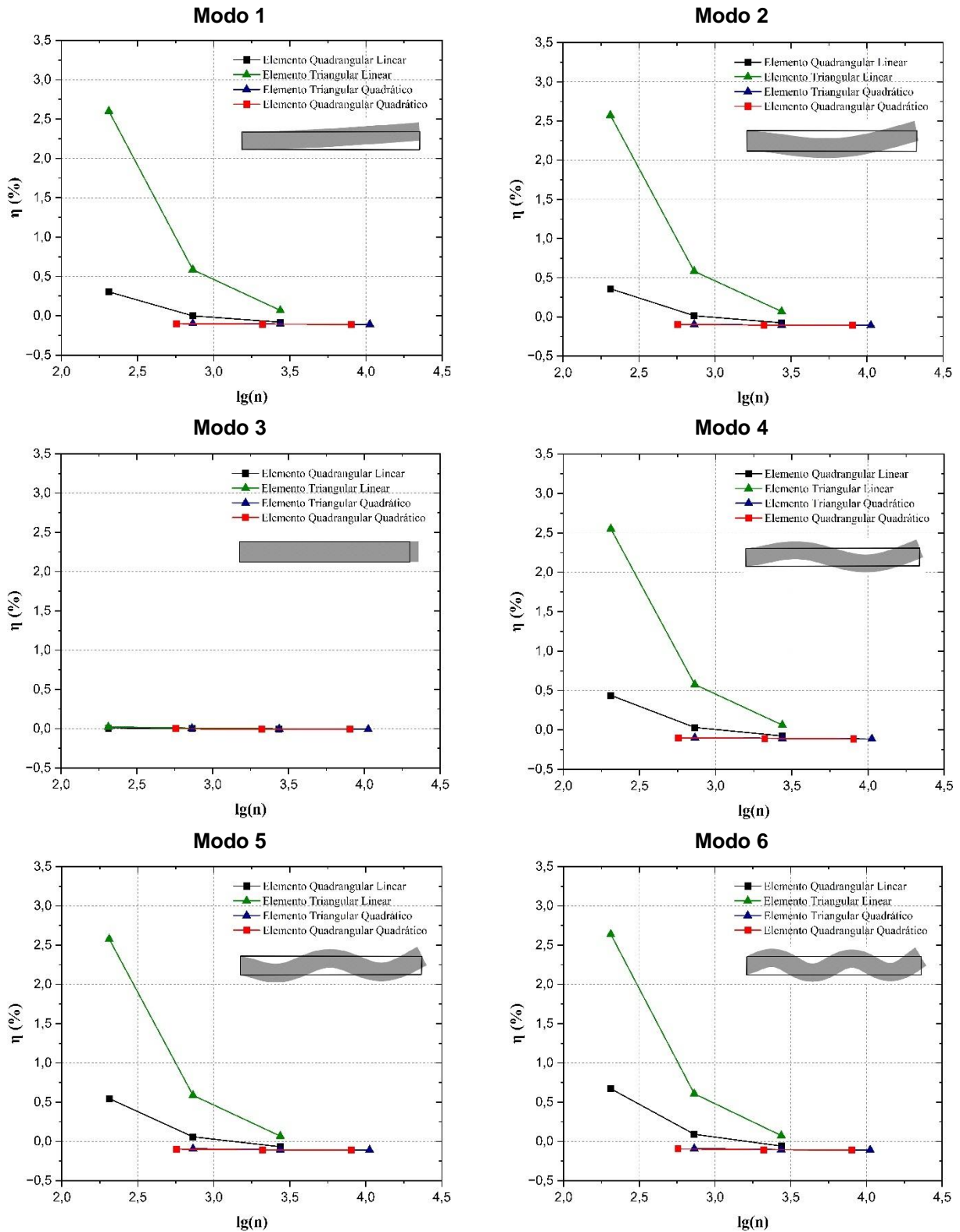
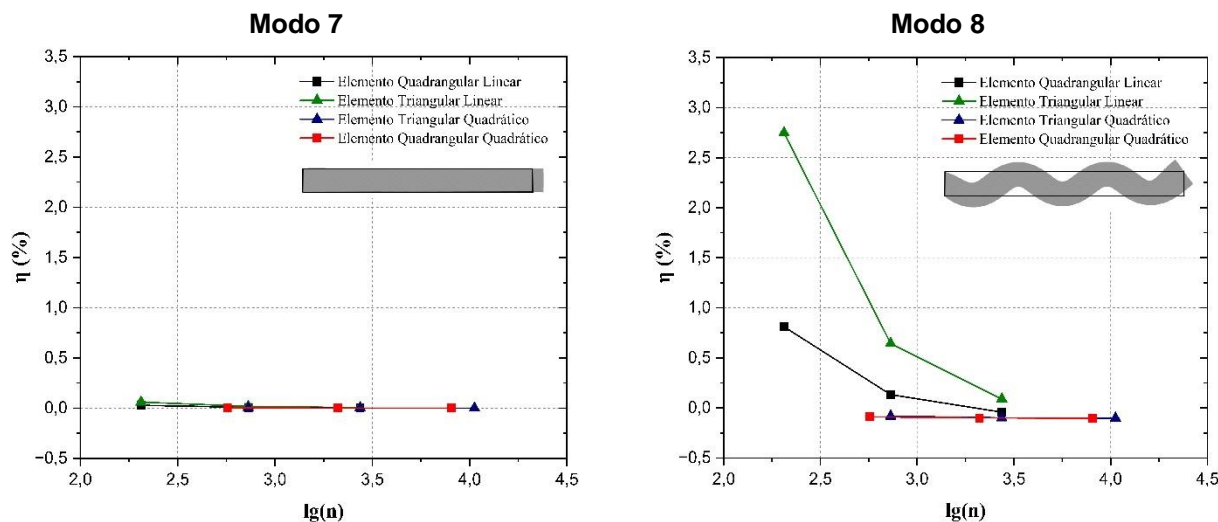




FIGURA 2 - Análise comparativa da convergência do erro estimado em função do logaritmo decimal do número de nós.

(conclusão)



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Nota-se, através dos resultados apresentados, que os modos três e sete são aproximados de forma mais eficiente, independentemente do tipo de elemento ou ordem polinomial. Os resultados são consonantes com as descobertas de Bortoli (2020), que também observou, ao analisar uma viga em balanço sob vibração livre, que os modos de vibração com predominância axial (longitudinal) exibem maior eficácia na convergência dos valores de frequência natural.

Além disso, é possível observar que os elementos de ordem polinomial quadrática, T6 e Q8, apresentam uma tendência de convergência parecida, ambas tendem ao erro zero rapidamente. A mesma tendência é observada por Custódio e Arndt (2017) e por Yang, Xu e Zheng (2016) que para análise de estruturas em vibração livre notam uma maior eficácia na taxa de convergência para o uso do elemento de ordem polinomial quadrática comparada ao uso do elemento de ordem linear, ainda que o elemento de ordem polinomial superior demandou um maior tempo de processamento para o mesmo problema.

Percebe-se também que os elementos quadrangulares aproximam melhor que os elementos triangulares. Outro ponto relevante, é a notável semelhança da convergência do erro estimado nos modos de vibração onde predominam as deformações geométricas flexionais, quando o elemento triangular linear (T3) é utilizado para discretização.

CONCLUSÃO

Ao explorar a mudança de parâmetros de discretização do MEF na viga engastada, o presente trabalho oferece uma base sólida para o estudo de técnicas adaptativas e aproximação em problemas de vibrações mecânicas. Através dos testes de convergência utilizando o erro estimado para todos os elementos e ordens polinomiais, foi possível concluir que os modos de vibração predominantemente axiais são mais facilmente aproximados do que os modos de deformações predominantemente flexionais. Foi observado que, em comparação aos elementos de ordem linear, os elementos de ordem



quadrática apresentam maior exatidão na aproximação com menor quantidade de elementos e nós. Além disso, constatou-se que o elemento quadrangular linear é mais eficiente na aproximação do que o elemento triangular linear, ainda que, quando utilizado o elemento triangular é possível notar uma grande semelhança no valor do erro estimado entre os modos de deformações predominantemente flexionais.

Agradecimentos

Agradeço aos orientadores deste trabalho por toda dedicação, apoio e oportunidade.

Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

BORTOLI, Lucas Herber. **Análise modal de estruturas planas com elementos finitos Q4 em notação strain gradient**. Orientador: Prof. Dr. João Elias Abdalla Filho. 2020. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, 2020.

CUSTÓDIO, Ricardo; ARNDT, Marcos. **O Método dos Elementos Finitos aplicado na análise de vibrações livres de problemas submetidos ao estado plano de tensões**. Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia: SMNE, Curitiba, Paraná, Brasil, 25 out. 2017.

FISH, Jacob; BELYTSCHKO, Ted. **Um Primeiro Curso em Elementos Finitos**. Rio de Janeiro, Brasil: LTC, 2009. v. 1. ISBN 978-85-216-1701-3.

LIU, G. R.; GU, Y. T. **A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids**. Journal of Sound and Vibration, [s. l.], v. 246(1), p. 29-46, 8 nov. 2000.

RAO, Singiresu. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009. ISBN 978-85-7605-200-5.

SORIANO, Humberto Lima. **Elementos Finitos: Formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas**. [S. l.]: Ciência Moderna, 2009.

YANG, Yongtao; XU, Dongdong; ZHENG, Hong. **Application of the three-node triangular element with continuous nodal stress for free vibration analysis**. Computers and Structures - ELSEVIER, [s. l.], 19 mar. 2016.