Aplicação do modelo de Verhulst para previsao do crescimento populacional da cidade de Toledo

Application of the Verhulst model to predict population growth in the city of Toledo

Giovanni Martins Villar Torino[1], Pablo Chang[2]

RESUMO

O artigo em questão aborda a aplicação do modelo de Verhulst para prever o crescimento populacional de Toledo, focando em fatores demográficos. Este modelo é uma ferramenta matemática amplamente utilizada em estudos demográficos para estimar o crescimento populacional, levando em consideração apenas a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade. A pesquisa coletou dados históricos de crescimento populacional de Toledo e aplicou o modelo abordado para projetar o crescimento futuro da população com base nas tendências observadas. Os resultados forneceram uma previsão sólida e específica do crescimento populacional da cidade nos próximos anos, sem considerar fatores ambientais ou socioeconômicos. Essa abordagem simplificada oferece uma visão clara das dinâmicas demográficas de Toledo, sendo útil para o planejamento de recursos e serviços públicos, como educação, saúde e infraestrutura, que dependem diretamente do tamanho e da composição da população. Portanto, o artigo destaca a utilidade do modelo de Verhulst como uma ferramenta valiosa para prever o crescimento populacional em uma perspectiva demográfica estrita.
PALAVRAS-CHAVE: Demografia. População. Verhulst.

ABSTRACT

The article in question addresses the application of Verhulst's model to predict Toledo's population growth, focusing on demographic factors. This model is a mathematical tool widely used in demographic studies to estimate population growth, taking into account only the birth rate and death rate. The research collected historical population growth data from Toledo and applied the model discussed to project future population growth based on observed trends. The results provided a solid and specific forecast of the city's population growth in the coming years, without considering environmental or socioeconomic factors. This simplified approach offers a clear view of Toledo's demographic dynamics, being useful for planning public resources and services, such as education, health and infrastructure, which directly depend on the size and composition of the population. Therefore, the article highlights the utility of the Verhulst model as a useful tool for predicting population growth in a strict demographic perspective.
KEYWORDS: Demography. Population. Verhulst.

INTRODUÇÃO

A modelagem matemática é uma ferramenta poderosa para compreender e prever o comportamento de sistemas complexos. Um dos modelos mais emblemáticos na análise de crescimento populacional é o Modelo de Verhulst, também conhecido como Modelo Logístico. Criado pelo matemático belga Pierre-François Verhulst no século XIX desempenha um papel fundamental na compreensão de como as populações crescem e se estabilizam ao longo do tempo. Como destacou Verhulst em seu trabalho seminal de 1838, o determinado modelo é uma representação poderosa da dinâmica populacional.

O Modelo de Verhulst é amplamente utilizado em diversas disciplinas, incluindo biologia, ecologia, economia, demografia e epidemiologia, devido à sua capacidade de

[1] Giovanni Martins Villar Torino. Universidade Tecnológica Federal Do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. E-mail: giovannitorino.2020@alunos.utfpr.edu.br.

[2] Pablo Chang. Universidade Tecnológica Federal Do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. E-mail: pablochang@utfpr.edu.br.

capturar nuances complexas do crescimento populacional. Conforme ressaltado por Robert May, em seu estudo clássico de 1976, este modelo oferece uma representação precisa da dinâmica de crescimento populacional em ambientes limitados por recursos finitos. Robert observou como o Modelo de Verhulst se tornou uma base essencial para a análise de sistemas complexos e sua estabilidade.

Assim exploraremos em detalhes o Modelo de Verhulst, seus princípios subjacentes, suas aplicações em várias áreas do conhecimento e a importância de compreender e usar esse modelo na análise de sistemas que evoluem ao longo do tempo. Ao fazer isso, estaremos em posição de apreciar melhor como a matemática pode lançar luz sobre os padrões complexos que regem o crescimento das populações e as implicações práticas dessas descobertas em nosso mundo em constante mudança, como enfatizado por vários estudos interdisciplinares ao longo das décadas.

MODELO DE CRESCIMENTO POPULACIONAL

Zill e Cullen (2001) comentam que na busca por um modelo que descreva o crescimento populacional, adequadamente, é comum utilizar da hipótese que a taxa de crescimento esteja diretamente relacionada com o tamanho da população conforme o decorrer do tempo. Descrevendo isto em linguagem matemática, obtemos a equação 1.

$$\frac{dP}{dt} = f(P) \tag{1}$$

No caso que a população é pequena, podemos supor que a população cresça em múltiplos de P, isto é, que a taxa de crescimento é diretamente proporcional ao número de habitantes em um determinado momento. Transcrevendo essa afirmação em uma equação matemática, obtemos a equação 2.

$$\frac{dP}{dt} = kP \tag{2}$$

com k denotando a constante de proporcionalidade.

A equação 2 é uma equação diferencial que pode ser resolvida utilizando o método de separação de variáveis e que tem como solução geral $P(t) = ce^{kt}$. Supondo que no tempo $t = 0$, a população era de $P(0) = P_0$ habitantes, conseguimos descobrir a constante c e obter a solução particular para o problema, que é $P(t) = P_0e^{kt}$. Este modelo ficou conhecido como Modelo Malthusiano que surgiu do trabalho de 1798, intitulado “An Essay on the Principle of Population”, publicado por Thomas Malthus (2020).

Contudo, Tavoni (2013) chama atenção para o fato de que esse modelo não leva em conta fatores que podem ser influenciáveis no crescimento de uma população. Também, uma solução exponencial não representa uma solução adequada com o passar do tempo, pois cresce de maneira indefinida, diferente do que ocorre com uma população ao longo do tempo.

Nesse sentido, surgiram outros modelos que incorporaram mais hipóteses, na tentativa de construir um modelo mais adequado, como é o caso do modelo logístico. Zill e Cullen (2001) comentam que existem várias generalizações deste modelo, mas que foi Pierre-François Verhulst, um dos primeiros estudiosos a desenvolver este modelo.

O modelo de Verhulst, assim como o de Malthus, adotou a hipótese que o crescimento populacional é diretamente proporcional à população num dado instante de tempo, mas que a medida que o número de habitantes começa a crescer, sua velocidade se retarda (2015), até atingir um limite máximo, que se refere a capacidade de suporte do ambiente. Sendo assim, enunciou que “a taxa da população seria proporcional à fração da população em relação ao tempo deveria ser proporcional à fração da população ainda não utilizada até o momento da análise” (2013). Matematicamente identificada como $(1 - P/K)$ e, portanto, podemos reescrever a equação 2 como sendo.

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \qquad (3)$$

onde K é a capacidade de suporte máximo do ambiente.

A equação 3 é uma equação diferencial ordinária que pode ser resolvida através do método de separação de variáveis. Sendo assim, podemos reescrever a equação 4 como:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(\frac{K - P}{K}\right) \qquad (4)$$

Separamos as variáveis e aplicando uma manipulação algébrica, obtemos a equação 5:

$$\frac{-K}{P(K - P)}dP = -kdt \qquad (5)$$

Por meio de frações parciais, podemos reescrever o membro esquerdo a igualdade da equação 5 como:

$$\frac{-K}{P(K - P)} = \frac{\mathcal{A}}{P} + \frac{\mathcal{B}}{K - P} \qquad (6)$$

Onde $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são constantes que temos interesse de encontrar. Podemos simplificar a equação anterior. Para isto, basta multiplicar em ambos os lados por $P\,(K - P)$. Assim,

$$-K = \mathcal{A}(K - P) + \mathcal{B}P$$
$$(-1 - \mathcal{A})K + (\mathcal{A} - \mathcal{B})P = 0 \qquad (7)$$

e daí vem que $\mathcal{A} = -1$ e $\mathcal{B} = -1$. Portanto:

$$\frac{-K}{P(K - P)} = \frac{-1}{P} + \frac{-1}{K - P} \qquad (8)$$

Pela equação 8, podemos reescrever a equação 5 como:

$$\left(\frac{-1}{P} + \frac{-1}{K - P}\right)dP = -kdt \qquad (9)$$

Integrando ambos os lados da igualdade, teremos que:

$$\int\left(\frac{-1}{P} + \frac{-1}{K - P}\right)dP = \int -k\,dt$$
$$-ln|P| + ln|K - P| = -kt + C \qquad (10)$$

É possível reescrever a equação 10 de modo a obter a solução explícita da equação diferencial 4. Basta que sejam feitas as seguintes manipulações algébricas:

$$-ln\left|\frac{K - P}{P}\right| = -kt + C$$
$$e^{ln\left|\frac{K-P}{P}\right|} = e^{-kt+C}$$
$$\frac{K - P}{P} = e^{-kt+C}$$
$$\frac{K - P}{P} = ce^{-kt}$$
$$K - P = Pce^{-kt}$$
$$Pce^{-kt} + P = K$$
$$P(1 + ce^{-kt}) = K$$

$$P = \frac{K}{1 + ce^{-kt}}$$

$$P(t) = \frac{K}{1 + ce^{K_1 t}} \tag{11}$$

Também, podemos deslocar a origem $t = 0$ para o ponto $t = t_0$. Portanto, obtemos:

$$P(t) = \frac{K}{1 + ce^{K_1(t - t_0)}} \tag{12}$$

onde K, K_1 e c são constantes. Sperling (1996), comenta que podemos obter os coeficientes através das seguintes equações:

$$K = \frac{2P_0P_1P_2 - P_1^2(P_0 + P_2)}{P_0P_2 - P_1^2} \tag{13}$$

$$c = \frac{K - P_0}{P_0} \tag{14}$$

$$K_1 = \frac{1}{t_2 - t_1} ln\left(\frac{P_0(K - P_1)}{P_1(K - P_0)}\right) \tag{15}$$

Em que P_0, P_1 e P_2 se referem a quantidade de habitantes nos instantes de tempo t_0, t_1 e t_2, respectivamente. Em particular, a constante K_1 pode ser obtida através de uma análise de regressão, ainda que, para este trabalho, não optemos por utilizar esse recurso.

Além disso, notamos que a medida que t tende ao infinito, $P(t)$ tende a um valor máximo, que é K, a capacidade máxima que o ambiente comporta. Leite, Sousa e Silva (2011) observam que a "formulação do modelo logístico supõe que a população sobre inibições naturais no seu crescimento", ou seja, a medida que o tempo decorre, a população tende a crescer em uma taxa menor em virtude do espaço disponível e competição pelos recursos limitados e quando atinge a população de saturação (ou população máxima), tende a se estabilizar.

PROBLEMA DE ESTUDO, DISCUSSÕES E RESULTADOS

Utilizando o modelo de crescimento logístico, estamos interessados em modelar uma curva que descreve o comportamento da população do município de Toledo, do estado do Paraná, determinando uma estimativa para os anos de 2030, 2040 e 2050, datas em que ocorrem os próximos censos realizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE. Levando em consideração a necessidade de encontrar as constantes contidas na equação 12, precisamos conhecer os dados populacionais da cidade analisada, em pelo menos três momentos.

Para tanto, realizamos uma visita ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE da cidade de Assis Chateaubriand para coletar os dados. Na oportunidade, obtivemos os dados dos censos demográficos relativos aos anos de 1970, 1980, 1991, 2000 e 2010, e, também, as estimativas para 2030, 2040 e 2050 (estes dados estão disponíveis no site do Instituto Paranaense de Desenvolvimento Econômico e Social (IPARDES) (2023).

Tabela 2: Censo demográfico da cidade de Toledo

Anos	Toledo
1970	68.885
1980	81.287
1991	94.879
2000	98.200
2010	119.313
2020*	139.109
2030*	154.696
2040*	166.085

* Estimativa segundo o IPARDES.

Fonte: Os autores (2023)

A partir dos dados coletados, obtivemos as constantes para construir o modelo logístico da cidade de Toledo. No entanto, ao utilizar do método de obtenção das constantes de Sperling (1996), precisamos seguir as restrições impostas, que são: os intervalos de tempo t_0, t_1, t_2 devem ser equidistantes e $P_0 < P_1 < P_2$, ou seja, a população deve ser crescente.

Nesse sentido, devemos considerar que o censo do ano de 1991 foi realizado no ano anterior, 1990, para que todos os dados coletados correspondem a intervalos de tempo que são equidistantes entre si. Também, como possuímos mais dados do que os necessários para uso das fórmulas, consideramos as diferentes possibilidades, com o objetivo de encontrar o modelo que mais se adequasse. Deste modo, obtivemos quatro possibilidades, que são: (1970,1980,1990), (1980, 1990, 2000), (1990, 2000, 2010) e (1970,1990,2010).

Os valores dos coeficientes obtidos em cada uma destas possibilidades serão apresentados na Tabela 2.

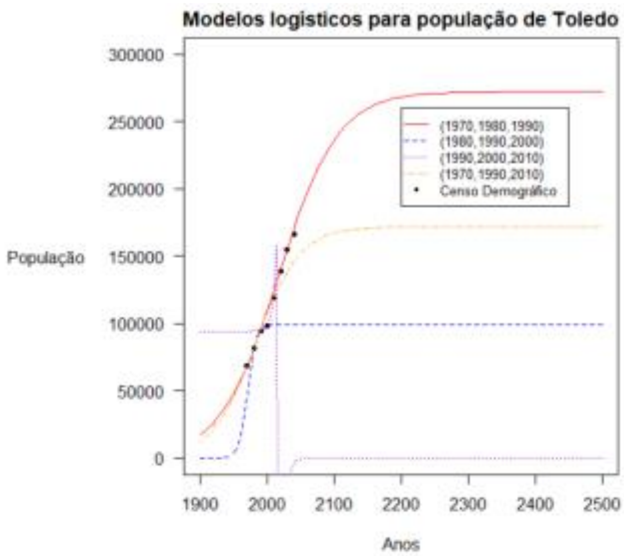
Tabela 2: Valores dos coeficientes P_s, c, K_1 para cada uma das situações e modelo de crescimento logístico obtido na cidade de Toledo.

Casos	P_s	c	K_1	Modelo Obtido
(1970, 1980, 1990)	272031,1828	2,949	-0,0228	$P_t = \frac{272031,1828}{1+2,949 \cdot e^{-0,0228(t-1970)}}$
(1980, 1990, 2000)	99079,2481	0,2189	-0,1598	$P_t = \frac{99079,2481}{1+0,2189 \cdot e^{-0,1598(t-1980)}}$
(1990, 2000, 2010)	94094,3474	-0,0082	0,162	$P_t = \frac{94094,3474}{1-0,0082 \cdot e^{0,162(t-1990)}}$
(1970, 1990, 2010)	171826,3356	1,4943	-0,0306	$P_t = \frac{171826,3356}{1+1,4943 \cdot e^{-0,0306(t-1970)}}$

Fonte: Os autores (2023)

Apesar de termos condições para construção de quatro modelos, estamos interessados no que melhor prevê o comportamento da população para, pelo menos, os próximos vinte anos. Sendo assim, é necessário que se escolha aquele que tenha melhor ajuste aos nossos dados. Para tanto, plotamos os quatro modelos no software R para visualizar qual seria a curva logísticas mais adequada, que foram apresentados na Figura 1.

Figura 1: Representação gráfica das curvas logísticas que descrevem o comportamento da população de Toledo entre os anos de 1970 á 2050.



Fonte: Os autores (2023)

Através de uma análise visual, podemos concluir que a curva logística em vermelho é o modelo desejado. Apresentando a seguinte equação:

$$P_t = \frac{171826{,}3356}{1+1{,}4943 \cdot e^{-0{,}0306(t-1970)}} \quad (16)$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levando em consideração a análise visual e os erros relativos obtidos, quando comparamos a população estimada pela nossa curva logística e a previsão do IPARDES, pensamos que o modelo obtido é pertinente para prever a população do município de Toledo nos próximos trinta anos. Nosso objetivo, com este trabalho, foi construir um modelo populacional que pudesse determinar a população para os próximos censos demográficos que serão realizados na cidade de Toledo.

O desenvolvimento desse modelo, no entanto, nos diz respeito a um possível cenário para a população, considerando que o comportamento de crescimento permaneça constante. Sendo assim, são descartadas as possibilidades de desastres naturais, guerras, emigrações, ou outros eventos que podem levar a uma queda significativa na população, como também, o inverso pode ocorrer, um acréscimo em massa da população por fatores econômicos, sociais, dentre outros. Nesse sentido, queremos dizer que, por mais que os modelos populacionais busquem considerar fatores para simular melhor a realidade, haverão outros que não foram considerados.

Nesse mesmo contexto, queremos deixar claro que não é o único modelo populacional, diferente do malthusiano, existem muitos outros disponíveis na literatura acadêmica, mas que optamos por não mencionar, tão pouco utilizar, neste trabalho. Além disso, vale chamar atenção para o fato que a escolha do modelo é a critério do pesquisador, levando em conta os dados disponíveis e qual deles se dá o melhor ajuste. Neste trabalho, por exemplo, o modelo Verhulstiano pode ser aplicado porque apresentava os critérios exigidos. Possa ser que em uma cidade que esteja enfrentando decréscimo na população, nos últimos anos, exige um modelo diferente para ser estudado o comportamento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, L. M. W; OLIVEIRA, C. F. Modelos de crescimento populacional: um olhar ´a luz de uma socioepistemologia. **UNIÓN** (LOCAL), n. 41. p. 107-133. 2015. Disponível em: < http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo6.pdf>. Acesso em: 31 mar. 2020.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre “como fazer "Modelagem Matemática na sala de aula. IN: ALMEIDA, L. W.; ARAUJO, J. L.; BISOGNIN, E. (orgs.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011, p. 19-43.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Contexto, 2016.

IPARDES. **Caderno Estatístico Estado do Paraná**. Disponível em: . Acesso em: 05 mar. 2023.

LEITE, M. B. F.; SILVA, G. H. J.; SOUSA, L. F. Modelos Matemáticos para o crescimento da população do Estado de São Paulo e a exploração de diferentes taxas de crescimento. **Ciência & Educação** (Bauru), v. 17, n. 4. p. 927-940. 2011. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v17n4/a10v17n4.pdf >. Acesso em: 07 abr. 2020.

OLIVEIRA, E. A.; IGLIORI, S. B. C. Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais: Um levantamento preliminar da produção científica. **Em Teia - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**. v.4. n. 2. 2013. Disponível em: . Acesso em: 06 abr. 2020.

SPERLING, M. V. **Introdução a qualidade das águas e ao tratamento de esgotos**. Belo Horizonte: Departamento de Engenharia Sanitária e Ambiental, Universidade Federal de Minas Gerais, 1996.

TAVONI, R. **Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst** - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. Rio Claro: Unesp, 2013, 70 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-graduação - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2013. Disponível em < https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92412/tavoni r me rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y >. Acesso em: 01 abr. 2020.

ULYSSES, S. Modelos Matemáticos. Disponível em: . Acesso em: 05 abr. 2020.

ZILL, D.G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.