XIII Seminário de Extensão e Inovação
XXVIII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR

Ciência e Tecnologia na era da Inteligência Artificial: Desdobramentos no Ensino Pesquisa e Extensão
20 a 23 de novembro de 2023 - *Campus Ponta Grossa, PR*

SEI-SICITE
2023

Solução e análise das formas de onda de sistema linear, discreto e invariante no tempo

Solution and analysis of linear, discrete and time-invariant system waveforms

Gustavo Figueiredo[1], Julio Cesar de Souza[2], Pedro Henrique Molina Oliveira[3], Flavio Luiz Rossini[4]

RESUMO

Neste trabalho apresentou-se a resolução de uma equação de sistema linear em tempo discreto (LDIT), denominada equação diferença, tanto em forma interativa, quanto a solução fechada. Primeiramente, mostrou-se a solução em resposta de entrada nula, negligenciando-se o sinal de excitação do sistema e posteriormente, obteve-se a resposta de estado nulo. A partir das duas respostas constitui-se a resposta total do referido sistema. Para validação dos resultados, utilizou-se o *software* MATLAB®, no qual ilustraram-se os gráficos das equações assim como a sobreposição das formas de onda de entrada e estado nulos.

PALAVRAS-CHAVE: Sistema Discreto Linear Invariante no Tempo[1]; Equação a Diferença[2]; Solução no Tempo[3]; Simulação Computacional[4].

ABSTRACT

This work presented the resolution of a linear system equation in discrete time (LDIT), called difference equation, both in interactive form and as a closed solution. Firstly, the solution was shown in null input response, neglecting the system excitation signal and subsequently, the null state response was obtained. From the two responses the total response of that system is constituted. To validate the results, the MATLAB® software was used, in which the graphs of the equations were illustrated as well as the superposition of the input and null state waveforms.

PALAVRAS-CHAVE: Time-Invariant Linear Discrete System1; Difference Equation[2]; Solution in Time[3]; Computer Simulation[4].

MATERIAL E MÉTODOS

RESPOSTA A ENTRADA NULA

Deseja-se resolver a seguinte equação diferença, dadas condições iniciais:

$$\begin{cases} y[n+2] - 1{,}774y[n+1] + 0{,}8187y[n] = 0{,}04663\delta[n+1] + 0{,}043628\delta[n] \\ y[-1] = a \\ y[-2] = b \end{cases} \tag{1}$$

[1]Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: gustavofigueiredo@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: xxxxxxxxxxxxxxxx.
[2]Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: jsouza.2020@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: xxxxxxxxxxxxxxxx.
[3]Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: pedrooliveira.2004@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: xxxxxxxxxxxxxxxx.
[4]Docente do Departamento Acadêmico de Eletrônica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, CampoMourão, Paraná, Brasil. E-mail: flrossini@utfpr.edu.br. ID Lattes: 8616413126997528.

Primeiramente, constituiu-se o polinômio característico da equação diferença a partir da notação operacional, da forma:

$$\epsilon^2 - 1{,}774\epsilon + 0{,}8187 = 0 \tag{2}$$

Resolveu-se a Eq. (2), e obtiveram-se as raízes complexas conjugadas:

$$\gamma_1 = 0{,}90482\mathrm{e}^{0{,}19879i} \text{ e } \gamma_2 = 0{,}90482\mathrm{e}^{-0{,}19879i} \tag{3}$$

A forma geral da resposta **[1]** de entrada nula é expressa por:

$$y_0[n] = c_1(\gamma_1)^n + c_2(\gamma_2)^n \tag{4}$$

Ao considerar as condições iniciais da Eq. (1) e aplicá-las na Eq.(4) obtém-se:

$$\begin{cases} y_0[-1] = c_1(\gamma_1)^{-1} + c_2(\gamma_2)^{-1} = a \\ y_0[-2] = c_1(\gamma_1)^{-2} + c_2(\gamma_2)^{-2} = b \end{cases} \tag{5}$$

Assim, construiu-se um sistema, da forma:

$$\begin{cases} c_1(\gamma_1)^{-1} + c_1(\gamma_2)^{-1} = a \\ c_2(\gamma_1)^{-2} + c_2(\gamma_2)^{-2} = b \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} (\gamma_1)^{-1} & (\gamma_2)^{-1} \\ (\gamma_1)^{-2} & (\gamma_2)^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{7}$$

Para resolução da Eq (7), utilizou-se a regra de Cramer da forma:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & (\gamma_2)^{-1} \\ b & (\gamma_2)^{-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\gamma_1)^{-1} & (\gamma_2)^{-1} \\ (\gamma_1)^{-2} & (\gamma_2)^{-2} \end{vmatrix}} = a(0{,}887 - 2{,}11211i) + b(-0{,}40935 + 2{,}03194i) \tag{8}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} (\gamma_1)^{-1} & a \\ (\gamma_1)^{-2} & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\gamma_1)^{-1} & (\gamma_2)^{-1} \\ (\gamma_1)^{-2} & (\gamma_2)^{-2} \end{vmatrix}} = b(-0{,}40935 - 2{,}03194i) + a(0{,}887 + 2{,}11211i) \tag{9}$$

$$c_1 = 2{,}2908ae^{-1{,}1732i} + 2{,}07276be^{1{,}76959i} \tag{10}$$

$$c_2 = 2{,}07276be^{-1{,}76959i} + 2{,}2908ae^{1{,}1732i} \tag{11}$$

Substituindo as condições da Eq. (1) e as raízes da Eq. (3), obtem-se:

$$y_0[n] = \left(2{,}2908ae^{-1{,}1732i} + 2{,}07276be^{1{,}76959i}\right)\left(0{,}90482e^{0{,}19879i}\right)^n + \left(2{,}07276be^{-1{,}76959i} + 2{,}2908ae^{1{,}1732i}\right)\left(0{,}90482e^{-0{,}19879i}\right)^n \quad (12)$$

Simplificando a expressão através a definição complexa do cosseno, constitui-se a resposta a entrada nula:

$$y_0[n] = 4{,}5816a(0{,}90482)^n \cos(-1{,}1732 + 0{,}1987n) + 4{,}1454b(0{,}90482)^n \cos(1{,}76959 + 0{,}1987n)$$

(13)

RESPOSTA A ESTADO NULO

Primeiramente, escreveu-se a resposta de estado nulo em seu formato geral **[1]**:

$$h[n] = A_0\delta[n] + y_c[n]u[n] = \frac{b_N}{a_N}\delta[n] + y_c[n]u[n] \quad (14)$$

$$y_c[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n \quad (15)$$

Em seguida, calculou-se a constante A_0 a partir dos coeficientes de $y[n]$ e $\delta[n]$:

$$A_0 = \frac{0{,}04362}{0{,}8187} = \frac{727}{13645} \quad (16)$$

Substitui-se a Eq. (16) na Eq. (14)

$$h[n] = \frac{727}{13645}\delta[n] + (c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n)u[n] \quad (17)$$

Realizou-se o atraso e mudou-se a notação da Eq. (1) de $y[n]$ para $h[n]$ para calcular $h[0] e\ h[1]$ de forma recursiva:

$$h[n] - 1{,}774h[n-1] + 0{,}8187h[n-2] = 0{,}04663\delta[n-1] + 0{,}04362\delta[n-2]$$

$$h[0] - 1{,}774h[-1] + 0{,}8187h[-2] = 0{,}04663\delta[-1] + 0{,}04362\delta[-2]$$

$$h[0] = 0 \quad (18)$$

$$h[1] - 1{,}774h[0] + 0{,}8187h[-1] = 0{,}04663\delta[0] + 0{,}04362\delta[-1]$$

$$h[1] = 0{,}04663 \tag{19}$$

Considerou-se os resultados das recursões Eq. (18) e Eq. (19) e se obteve:

$$h[0] = \frac{727}{13645}\delta[0] + (c_1\gamma_1^0 + c_2\gamma_2^0) = \frac{727}{13645} + c_1 + c_2 \tag{20}$$

$$h[1] = \frac{727}{13645}\delta[1] + (c_1\gamma_1^1 + c_2\gamma_2^1) = c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 \tag{21}$$

Com isso, construiu-se o sistema de duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -0{,}05621106 \\ c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 = 0{,}04663 \end{cases} \tag{22}$$

Utilizou-se a regra de Cramer para a resolução do sistema da Eq. (20) e obteve-se:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0{,}05621106 & 1 \\ 0{,}04663 & e_2 \end{vmatrix}}{\gamma_2 - \gamma_1} = -0{,}02663979 - 0{,}2627111i = 0{,}2640e^{-1{,}67185i} \tag{23}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -0{,}05621106 \\ e_1 & 0{,}04663 \end{vmatrix}}{\gamma_2 - \gamma_1} = -0{,}02663979 + 0{,}2627111i = 0{,}2640e^{1{,}67185i} \tag{24}$$

Substitui-se as as constantes obtidas em Eq. (23), Eq. (24) e as raízes obtidas em Eq. (3) na Eq. (17) resultando em:

$$y_c[n] = \left(0{,}2640e^{-1{,}67185i}\left(0{,}90482\mathrm{e}^{0{,}19879\mathrm{i}}\right)^n + 0{,}2640e^{+1{,}67185i}\left(0{,}90482\mathrm{e}^{-0{,}19879\mathrm{i}}\right)^n\right) =$$
$$0{,}528(0{,}90482)^{\mathrm{n}}\cos(1{,}6718 - 0{,}19879n) \tag{25}$$

Após isso, simplificou-se a Eq. (21) através da identidade trigonométrica do cosseno complexo e substitui-se as Eq. (16) e (21) em (14), na qual constitui-se a resposta de estado nulo.

$$h[n] = \frac{727}{13645}\delta[n] + [0{,}528(0{,}90482)^{\mathrm{n}}\cos(1{,}6718 - 0{,}19879n)]u[n] \tag{26}$$

Não foi necessário a convolução Eq. (26), pois $x[n] = \delta[n]$.

Dessa forma, a resposta fechada **[1]** é expressa por:

$$y[n] = h[n] + y_0[n] \tag{27}$$

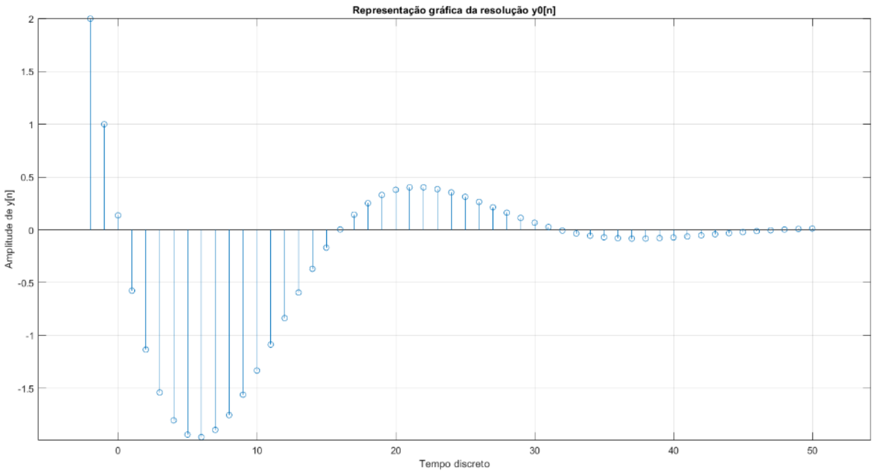
Substituíram-se as Eq. (13) e (26) em (23):

$$y[n] = \frac{727}{13645}\delta[n] + (0{,}528(0{,}90482)^{n}\cos(1{,}6718 - 0{,}19879n))u[n] + 4{,}5816a(0{,}90482)^{n}\cos(-1{,}1732 + 0{,}1987n) + 4{,}1454b(0{,}90482)^{n}\cos(1{,}76959 + 0{,}1987n) \tag{28}$$

RESULTADOS

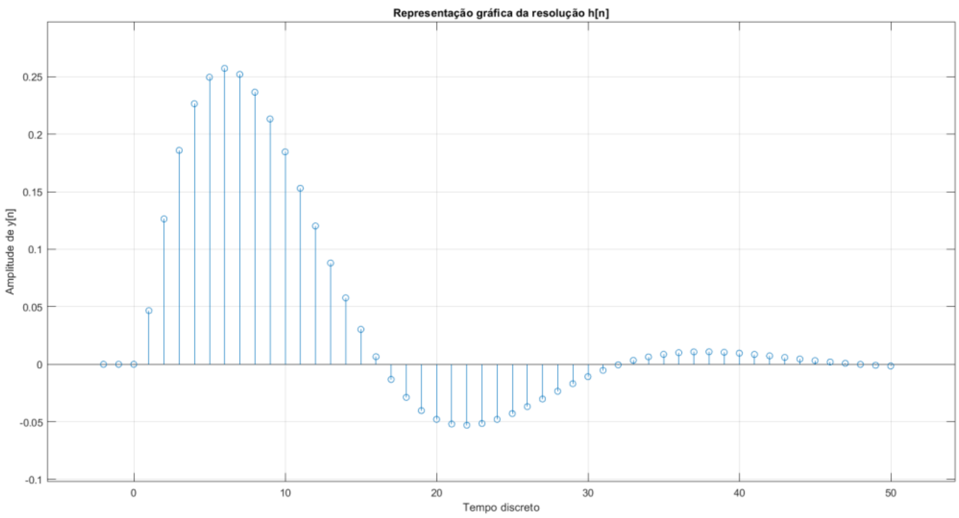
Para a ilustração dos gráficos foram utilizado os valores de $a = 1$ e $b = 2$.

Figura 1 – Resposta a entrada nula utilizando Eq. (13)



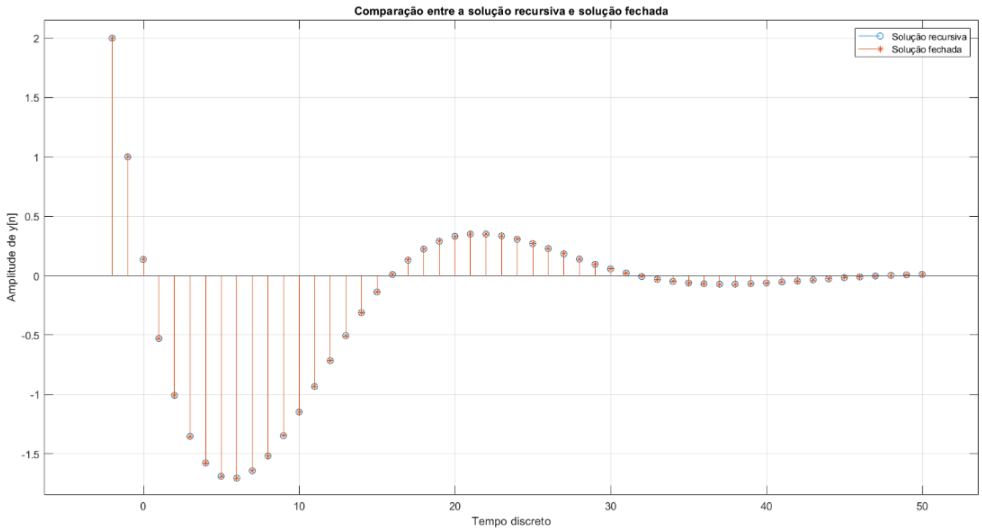
Fonte: autoria própria

Figura 2 – Resposta ao estado nulo utilizando Eq. (26)



Fonte: autoria própria

Figura 3 – Resposta total do sistema utilizando Eq. (28)



Fonte: autoria própria

CONCLUSÃO

Conclui-se que os os resultados das soluções separadamente coincidem, tanto nos casos de entrada nula, quanto de estado nulo, por meio da validação numérica. Essa é uma metodologia que pode ser aplicada à projetos de sistema reais, para checagem em processos industriais por exemplo, essa é uma metodolodia valiosa quando não há reposta pronta.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Professor Flávio Luiz Rossini, que leciona a matéria de Métodos de Matemática Aplicada e nos incentivou a participar do SEI-SICITE 2023.

CONFLITO DE INTERESSE

Não há conflitos de interesse.

REFERÊNCIAS

[1] LATHI, B. P. **Sinais e Sistemas Lineares**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.