



Análise de circuito elétrico RLC de três malhas via transformada de Laplace com softwares Matlab® e LTspice®

Analysis of a Three-Mesh RLC Electrical Circuit via Laplace Transform Using Matlab® and LTspice® Software

Patricia de Azevedo Andrade¹, Luiz Eduardo da Cruz Silva², Flavio Luiz Rossini³

RESUMO

O presente artigo apresentou um estudo sobre a análise de um circuito elétrico de configuração RLC (resistor, indutor e capacitor) paralelo, a partir do uso de ferramentas matemáticas para realizar a modelagem do circuito no domínio do tempo contínuo e na frequência complexa. Desta forma, é apresentado de forma sucinta as ferramentas matemáticas e teoremas de análise necessários para solucionar o sistema de equações obtidos da modelagem. A ferramenta chave para a análise no domínio da frequência complexa foi a transformada de Laplace, utilizada por conta de sua característica de transformar equações diferenciais lineares e contínuas no tempo em operações algébricas no domínio da frequência complexa, de forma a facilitar a resolução. Realizou-se também a transformada inversa de Laplace para satisfazer a solução final no domínio do tempo contínuo. Todo modelo matemático foi comparado com simulações feitas a partir de *softwares* MATLAB® e LTspice® para comprovar a eficácia da metodologia utilizada para a solução das equações que descrevem o circuito elétrico de configuração RLC.

PALAVRAS-CHAVE: Circuito elétrico; Equações lineares contínuas; *softwares* MATLAB® e LTspice®; Transformada de Laplace.

ABSTRACT

This article presented a study on the analysis of an electrical circuit with an RLC (resistor, inductor, and capacitor) parallel configuration, employing mathematical techniques to model the circuit in both continuous-time and complex frequency domains. The article succinctly introduces the mathematical tools and analysis theorems necessary to solve the system of equations derived from the modeling process. The key tool for analysis in the complex frequency domain was the Laplace transform, chosen for its ability to transform linear and continuous-time differential equations into algebraic operations in the complex frequency domain, simplifying their solution. Additionally, the inverse Laplace transform was applied to obtain the final solution in the continuous-time domain. The entire mathematical model was compared with simulations conducted using software to validate the effectiveness of the methodology used to solve the equations describing the RLC configuration electrical circuit.

KEYWORDS: Continuous linear equation; Electric circuit; Laplace Transform; *softwares* MATLAB® and LTspice®.

¹ Voluntário do Projeto de Extensão. Universidade Federal Tecnológica do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: patriciaandrade.2020@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: xxxxxxxxxxxxxxxxx.

² Voluntário do Projeto de Extensão. Universidade Federal Tecnológica do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: luizs.2003@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: xxxxxxxxxxxxxxxxx.

³ Docente no Curso de Engenharia Eletronica/DAELN. Universidade Federal Tecnológica do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: flrossini@utfpr.edu.br. ID Lattes: 8616413126997528 .



INTRODUÇÃO

A configuração de circuito elétrico RLC (resistor, indutor e capacitor), quando analisado somente no domínio do tempo contínuo, demonstra soluções com desenvolvimentos matemáticos complexos, isto por conta das equações diferenciais que descrevem o comportamento dos capacitores e indutores, onde se torna necessário recorrer a EDOs e até a métodos de análise numérica para satisfazer a solução do circuito elétrico (ALEXANDER; SADIKU, 2013). Por conta disto, foi apresentado uma maneira que facilita o desenvolvimento matemático, utilizando da transformada de Laplace para analisar o circuito no domínio da frequência complexa, onde as equações diferenciais são substituídas por operações algébricas. Isto se torna possível por conta das características de linearidade e continuidade no tempo dos capacitores e indutores (SILVA et al., 2023), (PAWELSKI; SILVA JUNIOR; ROSSINI, 2021), (PAWELSKI; ROSSINI; COLDEBELLA, 2022), (ROSSINI; PAWELSKI; SILVA JUNIOR, 2022).

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Um circuito RLC paralelo consiste em resistores, indutores e capacitores, conectados em paralelo. Os resistores controlam a corrente elétrica do circuito, e pode ser modelado matematicamente pela Lei de Ohm:

$$v_R(t) = i(t)R \quad (1)$$

sendo $v(t)$ a tensão em volts (V) sobre o resistor, $i(t)$ é a corrente em ampères (A) que passa pelo resistor, R é a resistência em ohms (Ω) do resistor.

Os capacitores tem a função de armazenar energia em seu campo elétrico, e sua modelagem matemática se dá pela seguinte equação:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (2)$$

sendo $v_c(t)$ a tensão, medida em volts (V), em função do tempo t em segundos (s), sobre o capacitor, C é a capacitância, medida em Farads (F), do capacitor, $\int_0^t i(\tau) d\tau$ é a integral definida da corrente $i(\tau)$, medida em ampères (A), em um intervalo de tempo de $[0, t]$.

Os indutores tem a função de armazenar energia em seu campo magnético, e sua modelagem matemática é dada pela seguinte equação:

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (3)$$

sendo $v_L(t)$ a tensão, medida em volts (V), em função do tempo t , em segundos (s), sobre o indutor, L corresponde a indutância, medida em Henries (H), do indutor, e $\frac{di(t)}{dt}$ é a derivada da corrente elétrica $i(t)$ em relação ao tempo t .

Por se tratar de um circuito RLC paralelo, foi trabalhado com mais de uma malha, o que fez-se necessário utilizar do método de análise por malhas, aplicando a lei de Kirchoff das tensões em cada malha conforme a polaridade do componente. Utilizou-se a ferramenta da transformada de Laplace,



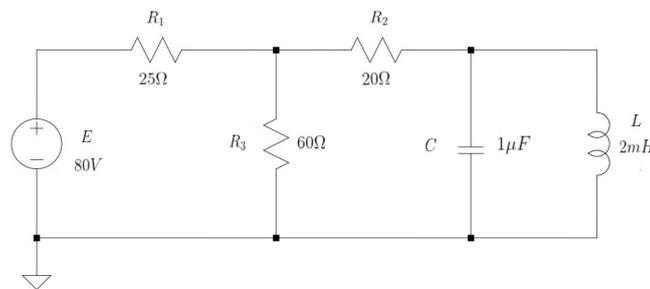
onde pelo sistema encontrado na análise se tratar de um sistema contínuo e linear no tempo, foi possível aplicá-la para facilitar os cálculos diferenciais, os transformando em operações algébricas no domínio da frequência complexa (LATHI, 2006).

Métodos como a Regra de Cramer foram utilizados para solucionar a modelagem matemática no domínio da frequência complexa, e a utilização do método das frações parciais foi utilizado para facilitar a aplicação da transformada inversa de Laplace.

METODOLOGIA

O circuito elétrico RLC com três malhas considerado, foi proposto por (ALEXANDER; SADIKU, 2013) para análise, como ilustrado na Figura 1:

Figura 1 – Circuito RLC paralelo



Fonte: Elaborado pelos autores (2023), adaptado de (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Aplicou-se o método de análise por malhas, o qual considera a Lei de Kirchoff das tensões, seguindo no sentido anti-horário das correntes e a polaridade das tensões dos componentes, conforme descrito nas Eq. (1) - (3).

Dessa maneira, foram obtidas as seguintes equações:

$$-Eu(t) + R_1 i_1(t) + R_3(i_1(t) - i_2(t)) = 0 \quad (4)$$

$$R_3(i_2(t) - i_1(t)) + R_2 i_2(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) - i_3(\tau) d\tau = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{C} \int_0^t i_3(\tau) - i_2(\tau) d\tau + L \frac{di_3(t)}{dt} = 0 \quad (6)$$

Por se tratarem de equações lineares e contínuas no tempo, foi recorrido ao uso da transformada de Laplace, aplicada nas Eq. (4) - (6), e após solucionar a transformada e realizar as devidas substituições pelos valores apresentados no circuito, e com os termos devidamente organizados, foi obtido o seguinte sistema:



$$\begin{cases} 85I_1(s) - 60I_2(s) = \frac{80}{s} \\ -60I_1(s) + \left(80 + \frac{1 \times 10^6}{s}\right) I_2(s) - \frac{1 \times 10^6}{s} I_3(s) = 0 \\ -\frac{1 \times 10^6}{s} I_2(s) + \left(\frac{1 \times 10^6}{s} + 2 \times 10^{-3}s\right) I_3(s) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Para solucionar o Sistema (7), constituiu-se sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 85 & -60 & 0 \\ -60 & 80 + \frac{1 \times 10^6}{s} & \frac{1 \times 10^6}{s} \\ 0 & \frac{1 \times 10^6}{s} & \frac{1 \times 10^6}{s} + 2 \times 10^{-3}s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{80}{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicou-se a regra de Cramer, e com os devidos determinantes encontrados, obtiveram-se as equações que descrevem as correntes elétricas do circuito no domínio da frequência complexa:

$$I_1(s) = \frac{4(s^2 + 12500s + 5 \times 10^8)}{s(2s^2 + 53125s + 1 \times 10^9)} \quad (8)$$

$$I_2(s) = \frac{3(s^2 + 5 \times 10^8)}{s(2s^2 + 53125s + 1 \times 10^9)} \quad (9)$$

$$I_3(s) = \frac{15 \times 10^8}{s(2s^2 + 53125s + 1 \times 10^9)} \quad (10)$$

Para retornar ao domínio do tempo, torna-se necessário realizar a Transformada Inversa de Laplace. Contudo, da forma em que as equações se encontravam, foi necessário recorrer ao método das frações parciais:

$$I_1(s) = \frac{j0,7817}{s - (-1,328 + j1,7989) \times 10^4} + \frac{-j0,7817}{s - (-1,3281 - j1,7989) \times 10^4} + \frac{2}{s} \quad (11)$$

$$I_2(s) = \frac{j1,1074}{s - (-1,328 + j1,7989) \times 10^4} + \frac{-j1,1074}{s - (-1,3281 - j1,7989) \times 10^4} + \frac{1,5}{s} \quad (12)$$

$$I_3(s) = \frac{-0,75 + j0,5537}{s - (-1,328 + j1,7989) \times 10^4} + \frac{-0,75 - j0,5537}{s - (-1,3281 - j1,7989) \times 10^4} + \frac{1,5}{s} \quad (13)$$

Após recorrer as frações parciais, foi possível aplicar a transformada inversa de Laplace, e obteve-se os seguintes resultados no domínio do tempo:

$$i_1(t) = 1,5634e^{-13281,25t} \cos\left(17989,12t + \frac{\pi}{2}\right) + 2u(t) \quad (14)$$

$$i_2(t) = 2,2149e^{-13281,25t} \cos\left(17989,12t + \frac{\pi}{2}\right) + 1,5u(t) \quad (15)$$

$$i_3(t) = 1,865e^{-13281,25t} \cos(17989,12t + 2,516) + 1,5u(t) \quad (16)$$



Para encontrar a tensão no capacitor e nos resistores, foi realizado o mesmo processo, logo obteve-se o seguinte resultado no domínio do tempo:

$$v_c(t) = 83,38e^{-1328,25t} \cos\left(1798,12t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (17)$$

$$v_{R_1}(t) = 39,085e^{-13281,25t} \cos\left(17989,12t + \frac{\pi}{2}\right) + 50u(t) \quad (18)$$

$$v_{R_2}(t) = 44,298e^{-13281,25t} \cos\left(17989,12t + \frac{\pi}{2}\right) + 30u(t) \quad (19)$$

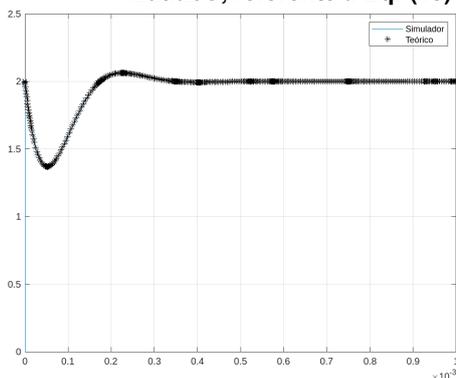
$$v_{R_3}(t) = 39,09e^{-13281,25t} \cos\left(17989,12t + \frac{\pi}{2}\right) + 30u(t) \quad (20)$$

Para validação das Eq. (14)-(20), estas foram comparadas com os gráficos gerados pelo simulador *LTspice®*. Em seguida, sobreporam-se as formas de onda correspondentes aos gráficos teóricos e simulados usando o *software MATLAB®*, as quais são detalhadas na próxima seção.

RESULTADOS

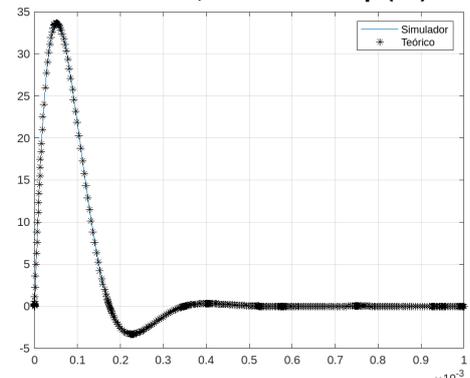
Após realizado os cálculos para encontrar as equações das correntes no domínio do tempo, compara-se os valores teóricos obtidos com os valores simulados. Nas Figuras 2 - 3, ilustrou-se as formas de onda obtidas a partir de ambos os *softwares*.

Figura 2 – Gráfico da corrente $i_1(t)$ no *Matlab®*, referente a Eq. (15)



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Figura 3 – Gráfico da tensão $v_c(t)$ no *Matlab®*, referente a Eq. (17)



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

O mesmo processo foi realizado para as correntes elétricas $i_2(t)$ e $i_3(t)$, bem como para as tensões $v_{R_1}(t)$, $v_{R_2}(t)$ e $v_{R_3}(t)$.

Observou-se como os gráficos correspondentes às equações obtidas por meio da aplicação da Transformada de Laplace no circuito se sobrepuseram aos gráficos das mesmas correntes obtidos por uma simulação nos *software*, o que comprovou a eficiência do método para solucionar o circuito.



CONCLUSÃO

A transformada de Laplace é uma poderosa ferramenta para analisar circuitos RLC complexos. Este estudo destaca como essa técnica simplifica equações diferenciais, permitindo soluções no domínio da frequência complexa. Uma base teórica sólida e compreensão dos princípios dos circuitos RLC são essenciais. Em resumo, a transformada de Laplace, combinada com ferramentas computacionais, é uma abordagem valiosa para a análise desses circuitos.

Agradecimentos

Gostaríamos de expressar nossa sincera gratidão ao Prof. Dr. Flávio Luiz Rossini por sua orientação e experiência fundamentais para a conclusão deste trabalho. Também agradecemos à UTFPR por proporcionar o ambiente acadêmico propício e os recursos necessários para o desenvolvimento deste projeto.

Conflito de interesse

Não houveram conflitos de interesse no presente artigo.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N O. **Fundamentos de circuitos elétricos com aplicações**. [S.l.]: Bookman, 2013. ISBN 9788580551730.

LATHI, B P. **Sinais e sistemas lineares**. [S.l.]: Bookman, 2006. ISBN 9788577803910.

PAWELSKI, Lucas; ROSSINI, Flávio Luiz; COLDEBELLA, Henrique. Desenvolvimento de um aplicativo estimador não paramétrico de função de transferência de processos industriais (EnPFTPI). **Anais do XII Seminário de Extensão e Inovação XXVII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR. Anais...Santa Helena(PR) UTFPR**, Santa Helena, 2022.

PAWELSKI, Lucas; SILVA JUNIOR, Paulo Roberto Machado; ROSSINI, Flávio Luiz. Desenvolvimento de um Aplicativo Simulador de Entrada-Saída Periódica de Circuito Elétrico RLC Série (MMA-SESOC). **Anais do XI Seminário de Extensão e Inovação XXVI Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR. Anais...Guarapuava(PR) UTFPR**, Guarapuava, 2021.

ROSSINI, Flávio Luiz; PAWELSKI, Lucas; SILVA JUNIOR, Paulo Roberto Machado. **Desenvolvimento do aplicativo métodos de matemática aplicada - simulador de entrada-saída periódica de circuito elétrico rlc série (mma-sespc)**. [S.l.]: Editora Científica Digital, 2022. Open science research II, p. 1350–1359.

SILVA, Victor Augusto da et al. Modelagem no domínio do tempo e aplicação da transformada de Laplace na solução e análise de um circuito RLC com três malhas. **Cidades inteligentes e novos modelos industriais**, Amplla Editora, v. 2, p. 62–84, 2023.