



Modelagem no Domínio do Tempo, Solução via Transformada de Laplace e Análise das Formas de Onda de Circuito Elétrico RLC Chaveado

Modeling in the time domain, solution of Laplace's transform and analysis of the waveforms of a passive RLC commutative electrical circuit

Otávio Amaro de Paula dos Santos¹, Matheus dos Santos Bezerra²,
Flávio Luiz Rossini³

RESUMO

O artigo propõe a modelagem matemática no domínio do tempo contínuo de um circuito elétrico passivo RLC, por meio das leis de *Kirchhoff* para obter-se o sistema na forma de equações diferenciais, solução a partir da transformada de *Laplace* e análise das formas de ondas das correntes elétricas e das tensões por meio dos softwares Matlab[®] e LTspice[®]. Assim, foram estabelecidas as seguintes etapas de desenvolvimento do presente artigo: (i) modelagem do sistema dinâmico no domínio do tempo; (ii) aplicação da Transformada de *Laplace*; (iii) elaboração das simulações no software Matlab[®] a partir das soluções fechadas; (iv) simulação do circuito chaveado no software LTspice[®]; e (v) validação e análise das formas de onda. O trabalho proposto, contribui para estudantes, engenheiros e profissionais na área de engenharia elétrica, com a apresentação do modelo, a solução do sistema de equações diferenciais e a checagem por meio de dois softwares reconhecidos na área de tecnologia e desenvolvimento.

PALAVRAS-CHAVE: Circuito chaveado; Circuito elétrico; Equações diferenciais; Transformada de *Laplace*.

ABSTRACT

The article proposes the mathematical modeling at the time domain of a RLC passive electrical circuit, by the *Kirchhoff's* law obtained the system in differential equations form, using the *Laplace's* transform, and analysis the waveforms of the voltage and electrical current by the softwares Matlab[®] and LTspice[®]. Therefore, was established the following stages: (i) modeling the dynamic system at the time domain; (ii) The application of *Laplace's* transform; (iii) The formulation of Matlab simulation from the closed solutions; (iv) simulation of the switched circuit on software LTspice; and (v) validation and analysis of the waveforms. The proposed work, contributes to students, engineers and works in the electrical engineering area, with the presentation of the model, the solution of the differential equations system and the check by the two softwares recognized in the technology and development area.

KEYWORDS: Switched circuit; Electric circuit; Differential equations; Laplace's transform.

¹ Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: otavioamaro@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 0760295972438509.

² Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: matheusarrezeb@gmail.com. ID Lattes: xxxxxxxxxxxxxxxxx.

³ Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: frossini@utfpr.edu.br. ID Lattes: 8616413126997528.

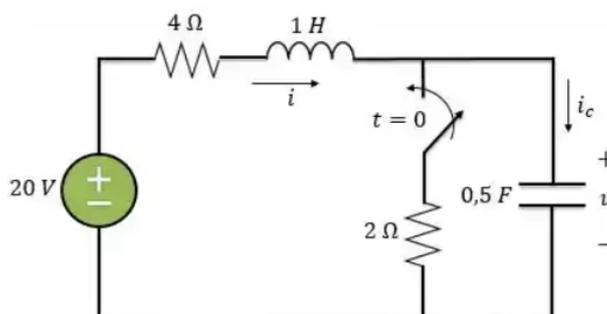
INTRODUÇÃO

Neste artigo, realizou-se a aplicação da transformada de *Laplace* num sistema de equações diferenciais obtidas por meio da modelagem matemática de um circuito elétrico pelas leis de *Kirchhoff*. Além disso, foi exposto como a transformada pode ser empregada na resolução de um circuito elétrico, no qual ocorre a comutação de uma chave, o que pode alterar a topologia do circuito e a consideração de condições iniciais para a nova estrutura do circuito [1]-[3]. Os resultados obtidos foram checados e validados a partir de *softwares* reconhecidos no meio acadêmico. O *software* LTspice® simulador de circuitos elétricos para obtenção de formas de onda das correntes e das tensões. O *software* Matlab®, usado na construção e comparação das formas de onda da solução fechada obtidas por meio da aplicação das transformadas de *Laplace*, aos resultados da simulação do *software* LTspice®.

APLICAÇÃO

A transformada de *Laplace* foi aplicada a um circuito RLC passivo chaveado, para o qual antes do tempo zero a chave está aberta e todas as condições iniciais do circuito são nulas. No instante de tempo zero, a chave do circuito foi fechada e um novo equacionamento para o circuito foi realizado.

Figura 1 – Circuito RLC chaveado



A modelagem matemática foi obtida através do uso das equações diferenciais de cada componente. Nas equações obtidas por meio da modelagem foram aplicadas a transformada de *Laplace*.

A modelagem matemática para cálculo da carga é expressa por:

$$v(t) = 1 \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + 4 \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{0,5} q(t) \quad (1)$$

Para calcular a equação da corrente no circuito, partiu-se do mesmo princípio, com as equações diferenciais da corrente.

$$i(t) = 1 \frac{di(t)}{dt} + 4i + \frac{1}{0,5} \int_0^t i(t) e^{-st} dt \quad (2)$$

Ao considerar os cálculos da transformada inversa aplicada, a equação da carga foi descrita por:

$$q(t) = -10e^{-2t} \cosh(\sqrt{2}t) - 10\sqrt{2}e^{-2t} \sinh(\sqrt{2}t) + 10u(t) \quad (3)$$

A função de carga do capacitor descrita pelo produto da divisão da carga Eq. (3) pelo valor do



capacitor, descrita por:

$$v_c(t) = \frac{-10e^{-2t} \cosh(\sqrt{2}t \sinh\sqrt{(2t)} + 10u(t)) - 10\sqrt{2}e^{-2t}}{0,5} \quad (4)$$

Ao realizar a divisão por 0,5 mostrada na Eq. (4), obteve-se a equação correspondente ao valor da tensão presente no capacitor, em qualquer instante do tempo, descrita por:

$$v_c(t) = -20e^{-2t} \cosh(\sqrt{2}t) - 20\sqrt{2}e^{-2t} \sinh\sqrt{(2t)} + 20u(t) \quad (5)$$

Para calcular a equação algébrica da corrente existem duas maneiras: (i) calcular por meio da equação diferencial, Eq. (2), seguido da aplicação da transformada de Laplace; ou (ii) derivar a equação da carga, Eq. (3).

Assim, selecionou-se a Eq. (2), a função da corrente para o circuito aberto, em seguida foi aplicada a propriedade da equação diferencial. Como mostrado a seguir:

$$1 \frac{di(t)}{dt} + 4i + \frac{1}{0,5} \int_0^t i(t)e^{-st} dt = 20u(t) \quad (6)$$

Com as condições nulas a partir da aplicação da transformada na Eq. (6), obteve-se:

$$sI(s) + 4I(s) + \frac{2I(s)}{s} = \frac{20}{s} \quad (7)$$

A partir da aplicação da transformada inversa na Eq. (7), obteve-se a equação de corrente no indutor no circuito com a chave aberta.

$$i(t) = 10\sqrt{2}e^{-2t} \sinh(\sqrt{2}t) \quad (8)$$

Para chegar as condições iniciais bastou aplicar o limite de $t \rightarrow \infty$ nas equações de corrente do indutor, Eq. (8), e tensão no capacitor, Eq. (5), da forma que o valor do capacitor descreve-se como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_c(t) = 20V \quad (9)$$

E para a corrente no indutor:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0A \quad (10)$$

A Modelagem matemática da Malha 1, pode ser escrita como:

$$R_1 i_1(t) + L \frac{di_1(t)}{dt} + R_2 [i_1(t) - i_2(t)] = 20u(t) \quad (11)$$

Aplicou-se a transformada na Eq. (11) e substituiu-se as condições iniciais, assim adquiriu-se:

$$[6 + s]I_1(s) - 2I_2(s) = \frac{20}{s} \quad (12)$$

A Modelagem matemática da Malha 2, resultou em:

$$R_2 [i_2(t) - i_1(t)] + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = 0 \quad (13)$$

Usou-se a transformada na Eq. (13) e obteve-se:

$$-2I_1(s) + \left[2 + \frac{2}{s}\right] I_2(s) = \frac{-20}{s} \quad (14)$$

A partir das Equações (12) e (14), as equações foram organizadas na forma de um sistema matricial.



$$\begin{bmatrix} (6+s) & -2 \\ -2 & (2+\frac{2}{s}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{s} \\ -\frac{20}{s} \end{bmatrix} \quad (15)$$

A partir dos cálculos matriciais por meio do método de Cramer, a corrente na malha 1 no domínio da frequência, descreve-se:

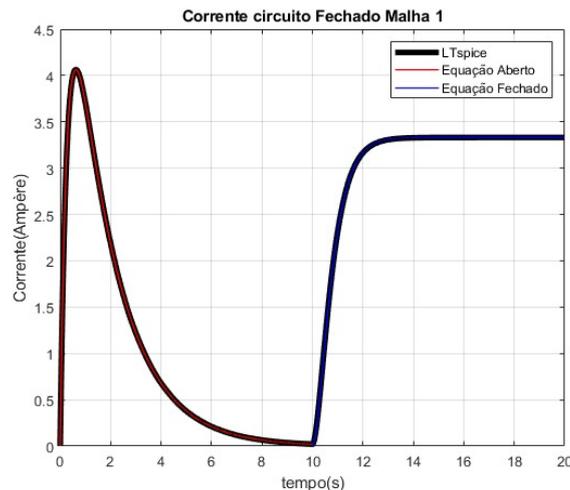
$$I_1(s) = \frac{20}{s(s+2)(s+3)} \quad (16)$$

A transformada de *Laplace* inversa aplicada à Eq. (16) resultou na equação em função do tempo da corrente que flui na malha 1 do circuito:

$$i_1(t) = -10e^{-2t} + \frac{20}{3}e^{-3t} + \frac{10}{3}u(t) \quad (17)$$

Na Fig. 2, apresenta-se o comportamento temporal da corrente na malha 1. Do início do circuito até atingir 10 segundos, descrita pela Eq. (8), após a comutação da chave o circuito possui a Eq. (17):

Figura 2 – Corrente da malha 1, Eq. (8) e (17)



Conforme ilustrou-se na Fig. 2, a sobreposição das Eq. (8) e (17) com a curva gerada pelo aplicativo LTspice® satisfaz a comparação entre a transformada e o dado obtido por meio do software. A partir da análise gráfica, o período transiente da corrente no circuito com a chave aberta descreve-se por um rápido incremento de corrente atingindo um pico de aproximadamente 4,06V, e descarregando até atingir 10 segundos, após a comutação da chave a corrente cresce de forma que estabiliza-se em aproximadamente 3,333V.

Para o cálculo da equação de corrente na malha 2, realizou-se o equacionamento por meio de *Cramer*, da forma que obteve-se:

$$I_2(s) = -\frac{10(s+4)}{(s+2)(s+3)} \quad (18)$$

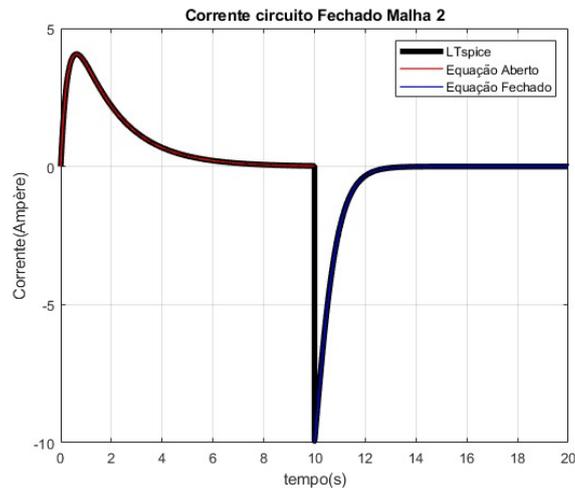
A partir da Eq. (18), realizou-se a transformada inversa e obteve-se a equação da corrente que percorre a malha 2 do circuito:

$$i_2(t) = -20e^{-2t} + 10e^{-3t} \quad (19)$$



Na Fig. 3, ilustrou-se a representação temporal da corrente na malha 2, num primeiro momento onde o circuito possuía apenas uma malha, a corrente é descrita pela Eq. (8), ao passo que o circuito atinge os 10 segundos de funcionamento, a equação do circuito passa a representar-se pela Eq. (19).

Figura 3 – Corrente na malha 2, Eq. (8) e (19)



Por meio da análise gráfica da Fig. 3, a curva correspondente a Eq. (8) refere-se ao período em que a chave do circuito está em estado aberto, com seu pico em 4,06V e após a comutação da chave a curva do grafica é representada pela Eq. (19), onde um pico de 10A ocorre instantaneamente e decresce exponencialmente até tornar-se nulo.

Para o cálculo da equação de tensão no capacitor partiu das propriedades aplicadas aos componentes eletrônicos obteve-se:

$$v_c(t) = \frac{1}{0,5} \int_0^t i_2(\tau) d\tau \quad (20)$$

Ao aplicar a transformada de Laplace na Eq. (20), adquiriu-se:

$$V_c(s) = \frac{-20(s+4)}{s(s+2)(s+3)} + \frac{20}{s} \quad (21)$$

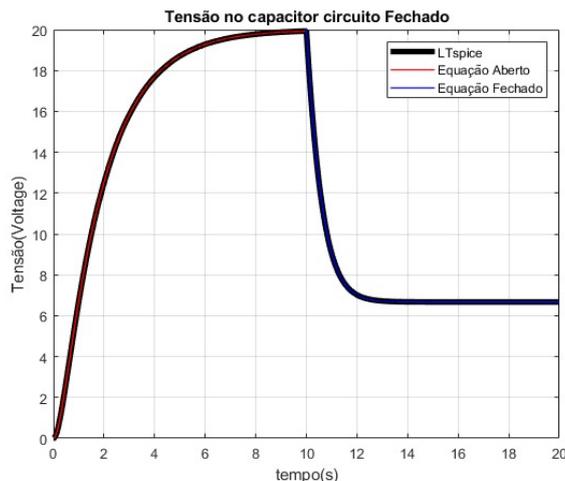
Além disso, obteve-se a equação da tensão no capacitor em função do tempo a partir do momento em que a chave fecha, dada por:

$$v_c(t) = 20e^{-2t} - \frac{20}{3}e^{-3t} + \frac{20}{3}u(t) \quad (22)$$

Na Fig. 4, ilustra-se o comportamento da tensão no capacitor, com a chave aberta a curva é descrita pela Eq. (5) e após 10 segundos com a comutação da chave descreve-se por Eq. (22):



Figura 4 – Tensão do capacitor, Eq. (5) e (22)



O período transitório da tensão do capacitor descreve-se Eq. (5) até os dez primeiros segundos, onde apresenta a característica curva de carga do capacitor, e armazena-se toda a tensão da fonte de 20V, Com a comutação da chave ocorreu a descarga exponencial da tensão e estagnou-se em 6,66V.

CONCLUSÃO

Nesse artigo, o circuito RLC chaveado foi utilizado para aplicar os conceitos de análise de circuitos elétricos e a transformada de *Laplace*. Construíram-se os modelos no domínio do tempo contínuo para o circuito antes e após a comutação da chave. O chaveamento além de promover mudanças nos níveis de tensão e corrente nos respectivos componentes, houve mudança na estrutura do sistema de equações. Com o chaveamento, o circuito passa a ser constituído por duas malhas, isso corresponde a um sistema com duas equações diferenciais, com condições iniciais. A partir das descrições matemáticas, usou-se a transformada de *Laplace* para computar as soluções fechadas, essa na frequência e no tempo contínuo. Implementou-se o circuito no *software* Ltspice®, extraíram-se as formas de onda para validação com as equações no Matlab®. Com o trabalho, observou-se que a transformada de *Laplace* é um ferramenta valiosa para obtenção de resposta de sistema lineares invariantes de tempo contínuo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] LATHI, B. P. *Sinais e Sistemas Lineares*. 2ª Ed., Porto Alegre: Editora Bookman, 2006.
- [2] ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew N. O. *Fundamentos de Circuitos Elétricos*. 5ª ed., Porto Alegre: AMGH, 2013.
- [3] ARAÚJO, Camila Duarte de. *Equações Diferenciais Aplicadas em Circuitos Elétricos*. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/7352>. Acesso em: 31/07/2023.