



Modelagem e simulação da cinemática direta de um robô móvel de três rodas com tração diferencial

Modeling and simulation of the forward kinematics of a three-wheeled mobile robot with differential traction

Reginaldo Ferreira de Sousa Barbosa¹, Lucas Ricken Garcia², Marcio Rodrigues da Cunha³, Flávio Luiz Rossini⁴

RESUMO

O presente artigo apresenta a modelagem e uma proposta de simulação da cinemática direta de um robô móvel de três rodas com tração diferencial. Atualmente a indústria tem produzido robôs móveis como eletrodomésticos para auxiliar nas atividades de casa. O presente trabalho propôs: (i) a modelagem da cinemática direta do robô móvel; (ii) a simulação computacional do sistema modelado; e (iii) a análise dos resultados numéricos. A partir da proposta, há possibilidade de construir um protótipo e embarcar o modelo matemático em hardware. O artigo busca apresentar a primeira etapa de projeto e construção de um robô móvel de três rodas com acionamento diferencial.

PALAVRAS-CHAVE: cinemática direta; modelo matemático; robótica móvel.

ABSTRACT

This article presents modeling and a proposal for simulating the direct kinematics of a three-wheeled mobile robot with differential traction. Currently, the industry has produced mobile robots as household appliances to assist with activities at home. The present work proposed: (i) modeling the direct kinematics of the mobile robot; (ii) computer simulation of the modeled system; and (iii) analysis of numerical results. From the proposal, there is the possibility of building a prototype and embedding the mathematical model in hardware. The article seeks to present the first stage of design and construction of a three-wheeled mobile robot with differential drive.

KEYWORDS: direct kinematics; mathematical model; mobile robotics.

INTRODUÇÃO

O estudo da movimentação de um robô envolve a análise de sua geometria, graus de liberdade, forças e torques. A primeira etapa da modelagem matemática de um dispositivo robótico é a cinemática, seguida pela dinâmica e controle (CRAIG, 2009).

A cinemática é o estudo da movimentação do robô que leva em consideração sua geometria, articulações e graus de liberdade. Por exemplo, robôs fixos podem ter estruturas baseadas em planos cartesianos, cilíndricos ou esféricos, enquanto robôs móveis podem ter um número definido de rodas com ou sem limitações na direção de seus movimentos. As forças e torques que geram esse movimento ficam de fora dessa etapa do estudo, que dá ênfase à descrição das trajetórias dos mecanismos do robô. As

¹ Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: reginaldobarbosa12@gmail.com. ID Lattes: 9474421375200439.

² Docente no Curso de Engenharia Eletrônica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: lucasgarcia@utfpr.edu.br. ID Lattes: 1085422040174691.

³ Docente no Curso de Engenharia Eletrônica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: marciocunha@utfpr.edu.br. ID Lattes: 0516286832674015.

⁴ Docente no Curso de Engenharia Eletrônica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campo Mourão, Paraná, Brasil. E-mail: frossini@utfpr.edu.br. ID Lattes: 8616413126997528.

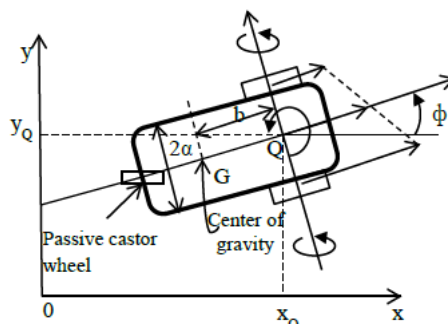


forças e torques são levados em consideração na modelagem dinâmica e de controle dos robôs móveis (CRAIG, 2009; TZAFESTAS, 2013).

Este trabalho abordou a modelagem matemática de um robô móvel com tração diferencial. Esse tipo de robô é caracterizado pela presença de duas rodas tracionadas localizadas a frente (normalmente controladas por motores DC) e uma ou mais rodas castor ou rodas livre na parte traseira (para garantir a estabilidade do equipamento) como pode ser visto na figura 1 (BORGES; DEEP; LIMA, 2003). Para o desenvolvimento do trabalho foi considerado apenas uma roda livre.

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver as equações cinemáticas para o robô da figura 1, que relaciona seu deslocamento com o a rotação de suas rodas e descrever esse processo no Matlab® para que seja possível verificar a possível trajetória do robô.

Figura 1 – Robô móvel de tração diferencial



Fonte: Tzafestas, 2013

ESPAÇO DE JUNTAS E ESPAÇO DE TRABALHO

Antes de desenvolver os conceitos de cinemática, é necessário entender o que são os espaços de juntas e de trabalho e o porquê eles são pontos importantes no estudo de um robô. O espaço de trabalho pode ser definido como o conjunto de pontos no espaço que o robô consegue alcançar. Enquanto que o espaço de juntas é o vetor que define o valor das juntas e acionadores para que o robô alcance o ponto objetivo no espaço de trabalho. No caso de robôs móveis que não apresentam juntas, são usadas as rotações das rodas que geram seu movimento (CRAIG, 2009; TZAFESTAS, 2013).

Para o caso do robô estudado no presente artigo, os vetores de posição e velocidade serão usados como os parâmetros para o desenvolvimento do modelo de cinemática.

EQUAÇÕES DO SISTEMA

Para descrever matematicamente as equações cinemáticas do robô é preciso assumir duas situações. A primeira é quanto à movimentação das rodas, é assumido que as rodas tracionadas não deslizam nas direções perpendiculares à da direção de movimento do robô. A segunda é que o vetor de velocidade está sempre na mesma direção do eixo de simetria do robô (BORGES; DEEP; LIMA, 2003).



Na tabela 1, nominaram-se as variáveis utilizadas nas equações. A finalidade das equações é estabelecer a relação entre a rotação das rodas e a velocidade linear global, primeiramente pela relação de velocidades do robô com as velocidades de referência global.

Na análise de $\dot{\theta}_e$ e $\dot{\theta}_d$, a velocidade angular é calculada pela derivada no tempo do ângulo de rotação das rodas. Depois de conhecidas essas duas variáveis, é possível calcular a velocidade linear a partir do raio das rodas (TZAFESTAS, 2013).

$$v_{d,e} = \dot{\theta}_{d,e} \cdot r \quad (1)$$

Tabela 1 – Variáveis e seus símbolos

Variável	Símbolo	Unidade de medida
Velocidade angular roda esquerda e direita	$\dot{\theta}_{e,d}$	rad/s
Velocidade linear roda esquerda e direita	$v_{e,d}$	cm/s
Velocidade linear do robô no eixo x	\dot{x}_r	cm/s
Velocidade linear do robô no eixo y	\dot{y}_r	cm/s
Velocidade angular do robô	$\dot{\phi}_r$	rad/s
Velocidade linear na referência global x	\dot{x}_g	cm/s
Velocidade linear na referência global y	\dot{y}_g	cm/s
Velocidade angular global	$\dot{\phi}_g$	rad/s

Fonte: Autoria Própria

Cada velocidade linear representa metade da velocidade total do robô no eixo x, isso pode ser provado pela análise de cada roda individualmente e em seguida somar os valores de v_d e v_e . A partir desses passos, e após desenvolver os cálculos, obtém-se a Eq. (2). A velocidade no eixo y do robô é igual à zero, pois foi considerado que as rodas não derrapam, e por limitação mecânica, o robô não consegue fazer movimentos laterais. Quanto à velocidade angular do robô, ela é dada pela diferença entre as velocidades lineares das rodas, dividido pelo diâmetro do chassi, isso acontece por que a rotação ocorre no eixo de umas das rodas e uma delas é responsável por uma rotação positiva e outra por uma negativa. (TZAFESTAS, 2013).

$$\dot{x}_r = \frac{r}{2} (\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_e) \quad (2)$$

$$\dot{\phi}_r = \frac{r}{2l} (\dot{\theta}_d - \dot{\theta}_e) \quad (3)$$



Entre os referenciais do robô e o global, existe um ângulo ϕ que deve ser considerado para o cálculo das variáveis globais, ele pode ser visto na figura 1. Quando é realizada a projeção das variáveis na referência global obtêm-se as relações da matriz na Eq (4).

$$\dot{x}_g = \dot{x}_r \cos(\phi) \quad (4)$$

$$\dot{y}_g = \dot{x}_r \sin(\phi) \quad (5)$$

$$\dot{\phi}_g = \dot{\phi}_r \quad (6)$$

É importante não confundir os valores do eixo y nos dois referenciais. No robô, a velocidade em y é zero por que ele não derrapa para os lados, mas nada impede o robô de seguir a direção do eixo y global. Quanto à velocidade angular, ela é a mesma para os dois sistemas de referência. Depois de unidos os dois sistemas de equações, é obtida a relação da Eq. (7) entre as velocidades globais e a rotação das rodas, essa relação é mostrada no formato matricial com o jacobiano (TZAFESTAS, 2013).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \dot{y}_g \\ \dot{\phi}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r \cos(\phi)}{2} & \frac{r \cos(\phi)}{2} \\ \frac{r \sin(\phi)}{2} & -\frac{r \sin(\phi)}{2} \\ \frac{r}{2l} & \frac{r}{2l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_d \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} \quad (7)$$

ALGORITMO DE SIMULAÇÃO

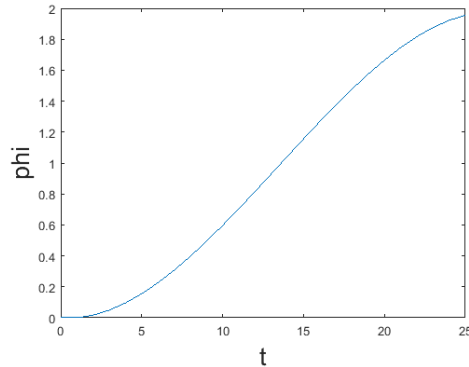
Com a Eq. (7) em mãos, desenvolveu-se um *script* no Matlab® para o desenvolvimento de gráficos que descrevessem a trajetória com base nessa relação. Esse *script* segue o seguinte algoritmo: (i) Acionar as rodas por um determinado período, (ii) calcular o deslocamento linear, (iii) recalculer o ângulo de rotação do robô, (iv) reajustar os valores iniciais para os valores atuais, (v) recomençar o processo. Esse algoritmo é recursivo e se ajusta a cada execução, no final são gerados gráficos de trajetória, velocidade linear em x e y e vetor velocidade no decorrer da trajetória. Para descrever a rotação das rodas desenvolveu-se um polinômio de grau três, com início e fim suavizado para garantir uma rotação mais realista.

$$\theta_{d,e}(t) = \frac{3\theta_f}{t_f^2} t^2 - \frac{2\theta_f}{t_f^3} t^3 \quad (8)$$



Esse polinômio é dado pela Eq. (8) e o gráfico da figura 2 mostra um exemplo para a situação em $q t_f = 3$ e $\theta = 3$.

Figura 2 – Gráfico da função θ



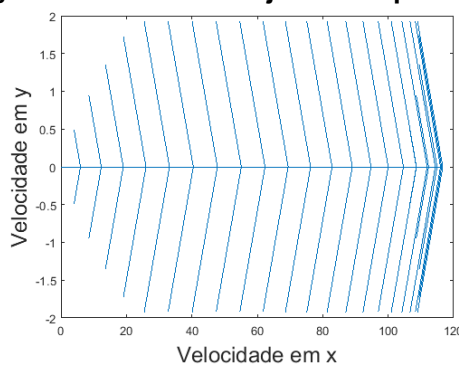
Fonte: Autoria própria

RESULTADOS

Para demonstrar os resultados obtidos com o *script* construiu-se uma simulação para três situações. Na figura 3, o robô tem o mesmo número de rotação nas duas rodas. Na figura 4, o robô tem mais rotações na roda direita, e na figura 5 tem mais rotações na roda esquerda. As constantes referentes aos chassis do robô foram definidas de acordo com os componentes comerciais mais comuns, com o diâmetro do corpo do robô igual a 10,5 cm e raio da roda igual a 3,3 cm. No início de cada simulação o robô se encontra no centro do referencial global (coordenadas (0,0)) e em paralelo com o eixo x, com sua frente direcionada no sentido positivo do eixo. As setas nos gráficos representam o vetor velocidade linear da referência global do robô. Os gráficos seguintes demonstram os resultados nas três situações.

Nas Figuras 3 e 4, ilustraram-se as simulações de velocidade para $\theta_d = \theta_e$, $\theta_d > \theta_e$ e $\theta_d < \theta_e$, respectivamente.

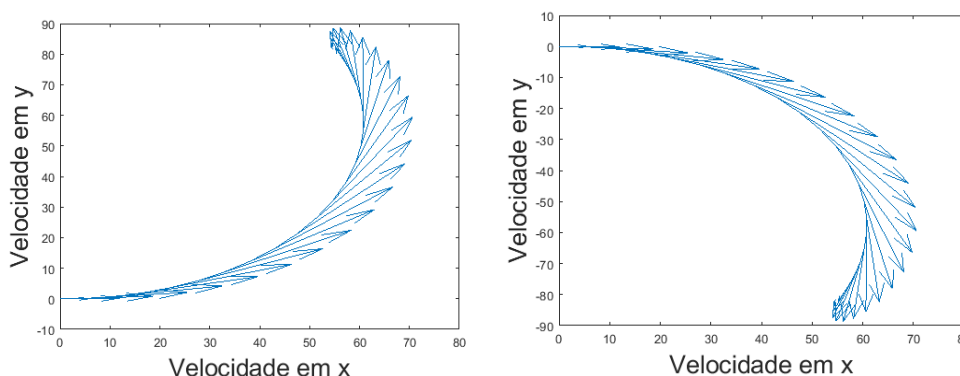
Figura 3 – Gráfico da trajetória no plano xy



Fonte: Autoria própria



Figura 4 – Gráfico da trajetória no plano xy (A esquerda $\theta_d > \theta_e$ e a direita $\theta_d < \theta_e$)



Fonte: Autoria própria

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos com o algoritmo, que descreve as equações e gera os gráficos, são satisfatórios, pois ele descreve trajetórias condizentes com os valores de entrada. Os gráficos também mostram o vetor velocidade que acompanha de forma tangencial a trajetória gerada. Esses resultados são úteis como modelos para criação de robôs móveis reais com sistemas embarcados e podem, também, ser usados como exemplos didáticos de robôs virtuais.

Conflito de interesse

Não há conflito de interesses.

REFERÊNCIAS

CRAIG, J. J. **Introduction to robotics: mechanics and control**. 3. ed. Pearson Education India, 2009.

Tzafestas, S.G. **Mobile Robot Control**. National Technical University of Athens Athens, Greece, 2013.

BORGES, Geovany; DEEP, Gurdip; LIMA, Antonio. **Controladores cinemáticos de trajetória para robôs móveis com tração diferencial**. In: VI SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 6., 2003, Bauru. Artigo [...]. Bauru: [s. n.], 2003.

ROSSINI, Flavio Luiz et al. **Robust Controller Design Of A Wheelchair Mobile Via Lmi Approach To Erp Systems With Feedback Output**. IEEE Latin America Transactions, v. 13, n. 5, p. 1321-1330, maio 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/tla.2015.7111985>. Acesso em: 14 set. 2023.