Algoritmos quânticos para solução de EDO's um estudo inicial

Quantum algorithms for solving ODEs an initial study

Sabrina Fatima Canova[1],
Gabriel Pauluk Giaretta[2], Luan Maciel Ferreira[3], Vinicius Rossi Marcos[4]
Karen Carrilho Da Silva Lira[5],Marcello Antonio Alves Talarico[6]

RESUMO
O presente trabalho parte do objetivo de apresentar um estudo sobre Algoritmos Quânticos para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) aplicadas na área da computação quântica, com o intuito de apresentar a facilidade de resolução de EDOs por meio da implementação de algoritmos que usam os sistemas quânticos para manipular as informações. Sendo assim, tais informações são armazenadas em Qubits, que são um tipo de bit específico baseado em um sistema a priori de caráter bidimensional nos quais ocorre uma sobreposição de estado, ao contrário dos bits tradicionais que existem em um determinado estado fixo (0 ou 1) não podendo assumir múltiplos estados. Dessa forma, a computação quântica consegue realizar tarefas com uma eficiência maior do que a maioria da computação clássica, salvo para casos da aplicação da computação clássica reversa, que possui suas peculiaridades—.
O uso de Algoritmos Quânticos para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias possui considerável vantagem quando comparado com qualquer outro algoritmo de busca que usa do meio tradicional.
PALAVRAS-CHAVE: Algoritmos; EDO; Quântica.

ABSTRACT
The present work aims to present a study on Quantum Algorithms for solving Ordinary Differential Equations (ODEs) applied in the area of quantum computing, with the aim of presenting the ease of solving ODEs through the implementation of algorithms that use the quantum systems to manipulate information. Therefore, such information is stored in Qubits, which are a specific type of bit based on an a priori two-dimensional system in which a state superposition occurs, unlike traditional bits that exist in a certain fixed state (0 or 1) and cannot assume multiple states. In this way, quantum computing can perform tasks with greater efficiency than most classical computing, except for cases of the application of reverse classical computing, which has its peculiarities. The use of Quantum Algorithms to solve Ordinary Differential Equations has a considerable advantage when compared to any other search algorithm that uses traditional means.
KEYWORDS: Algorithms; ODEs; Quantum.

APLICAÇÕES

[1] Voluntário. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. E-mail: scanova@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes:8887508100562086.
[2] Voluntário. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. E-mail: gabrielpaulukgiaretta@gmail.com. ID Lattes:1177150971179194.
[3] Voluntário. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. E-mail: luanmf13@gmail.com. ID Lattes: 5160621510666317.
[4] Voluntário. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. E-mail: vinicius1080885@gmail.com. ID Lattes:0376929985900313.
[5] Docente do curso de Engenharia Civil. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. E-mail: karenc@utfpr.edu.br . ID Lattes:0544115829751480
[6] Docente do curso de Engenharia Civil. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. E-mail: talarico@utfpr.edu.br. ID Lattes: 2029666311122511.

Diversos algoritmos que resolvem Equações Diferenciais exigem uma preparação de estados quânticos. A preparação dos estados iniciais é importante na Computação Quântica, já que o algoritmo depende de uma boa escolha para a base, uma vez que os algoritmos terão de ser implementados em sistemas físicos. Sendo assim, a preparação dos estados iniciais para que o algoritmo seja executado, consiste em um algoritmo quântico, o qual por sua vez recebe como parâmetro um conjunto de coeficientes e os codifica. Os estados são descritos por um conjunto de coeficientes e bases computacionais no espaço de Hilbert, a partir de um formato de bases usuais do tipo $|i\rangle$, onde o estado inicial é do tipo $|0\rangle$ de acordo com a seguinte relação (AKAMATSU, 2022):

$$|i\rangle \Rightarrow |\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i |i\rangle \tag{1}$$

A descrição da codificação dos estados é tida pela divisão de todo o sistema quântico que constitui um computador operando em sistema quântico que é fragmentado em duas partes: os ancilla qubits, são codificadores e controladores de operações lógicas, e o sistema “Quantum Bit” de trabalho, que codifica as formas iniciais do problema que irá evoluir para um algoritmo de caráter quântico após ser submetido e resolvido por esse sistema. O método da preparação do Estado é inicializar o sistema em uma superposição quântica definida por N-dimensões adequadas ao problema a ser resolvido em um computador quântico. Esse objetivo é costumeiramente realizado por sub-rotinas que, em algoritmos quânticos, geralmente são chamadas de codificação do sistema. Existem diferentes formas de codificação, como codificação de base e codificação de amplitude: a primeira é usada para manipular números reais aritmeticamente, a segunda usa do tamanho do espaço de Hilbert para codificar dados como amplitudes de probabilidade (CARDOSO et al., 2021).

RESULTADOS

Existem incontáveis algoritmos para a preparação, manipulação e gestão de estados, entretanto nem todos são capazes de uma aplicação para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). O algoritmo encontrado para resolução de Problemas de Valor Inicial (PVIs) se baseia no Algoritmo de Grover, um algoritmo de grande eficácia, o qual expande as amplitudes dos estados bem formulados, consequentemente tornando o sistema mais funcional e diretamente menos custoso (AKAMATSU,2022).

A ideia é criar um sistema quântico no qual o algoritmo é executado pela evolução temporal do sistema, dessa maneira estando na amplitude de probabilidade o resultado. Assim o resultado é encontrado quando medimos o nosso sistema. A medida está ligada ao quadrado da amplitude de probabilidade. Será exemplificado o algoritmo de Grover, uma vez que o procedimento, em linhas gerais, segue o mesmo procedimento.

Exemplificando de forma breve, a metodologia faz uso de uma superposição uniforme, portas de Pauli X e portas Hadamard, as quais são a base da criação de estados de superposição onde será codificada a solução nas amplitudes de probabilidade. Temos a seguir as suas respectivas representações matriciais:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Explicando o algoritmo de maneira geral, nele é considerado um espaço de N elementos e M soluções, fazendo o uso de um registro de n qubits nos quais são processados os elementos do espaço, e um registro do oráculo o qual se trata de um elemento do circuito quântico capaz de reconhecer as soluções e quando as encontra altera suas fases de estado. Dessa forma, inicialmente o computador se encontra no estado $|0\rangle^{\otimes n}$, após a aplicação da porta de Hadamard resulta no novo estado:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i |x\rangle \tag{3}$$

Após a formação do novo estado, será aplicada múltiplas vezes a chamada Iteração de Grover:

$$G = (2|\psi\rangle\langle\psi| - I)O \tag{4}$$

Temos como I o operador Identidade e O o oráculo. Essa aplicação do operador G em conjunto com uma orton normalização de Graham-Schmidt que irá separar o estado em dois componentes, a saber, os componentes que são solução e a parte que não o é.

Após essa etapa, temos o processo de medição do estado, cujas probabilidades mais altas são ligadas às respostas corretas. Desta maneira, entendendo Grover como a base de estudo para o nosso algoritmo. Outro ponto que devemos ter claro é que esses algoritmos precisam ser desenvolvidos problema a problema, e o objetivo deste trabalho foi conhecer em linhas gerais a metodologia.

CONCLUSÃO

Foi apresentado neste trabalho o algoritmo de Grover, ao invés de algoritmo específico dado que os dois são equivalentes, pois o algoritmo de Grover se mostrou um algoritmo de busca eficiente, e deseja-se com o algoritmo para PVIs a busca das soluções. Ao programar o algoritmo quântico é preciso ter em mente que é necessário saber quais serão as propriedades gerais das soluções, e o algoritmo vai “buscar” as soluções dentro desse conjunto. Ou seja, a cada equação de PVIs exige uma programação específica.

O uso de Algoritmos Quânticos para a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias possui considerável vantagem quando comparado com qualquer outro algoritmo de busca que usa do meio tradicional. Ao comparar a complexidade de um algoritmo tradicional com a de um algoritmo quântico, denota-se um abismo técnico, tendo em vista que o algoritmo de Grover, em determinadas condições, possui uma complexidade de O($\sqrt{N}$) em que N é o tamanho do domínio da função (AKAMATSU,2022).

Entretanto, a Computação Quântica, por se tratar de uma área de pesquisa em desenvolvimento, possui um número limitado de pesquisas e trabalhos publicados, o que transforma algo complicado em um verdadeiro desafio para a grande maioria dos cientistas em formação.

Agradecimentos

Esse trabalho foi estimulado pela professora Karen Carrilho Da Silva Lira, como parte da disciplina Equações Diferenciais Ordinárias. E foi orientado pelo professor orientador Marcello Antonio Alves Talarico.

Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

AKAMATSU, Daniel Yoshio. **Algoritmos quânticos para resolução de equações diferenciais: análise de complexidade e aplicabilidade**. 2022. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/16266. Acesso em 21 out. 2022.

CARDOSO, Fernando R. et al. **Detailed Account of Complexity for Implementation of Circuit-Based Quantum Algorithms.** Frontiers in Physics, p. 582,2021. Disponível em: https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fphy.2021.731007/full?utm_source= dlvr.it & utm_medium=twitter. Acesso em 21 out. 2022.

XIN, T. et al. **Quantum algorithm for solving linear differential equations: Theory and experiment.** Phys. Rev. A, American Physical Society, v. 101, p. 032307, Mar 2020. Disponível em: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.101.032307. Acesso em 21 out. 2022.