XIII Seminário de Extensão e Inovação
XXVIII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR
Ciência e Tecnologia na era da Inteligência Artificial: Desdobramentos no Ensino Pesquisa e Extensão
20 a 23 de novembro de 2023 - *Campus Ponta Grossa, PR*
SEI-SICITE 2023

Estudo e aplicação da aproximação de e^{x^2} através da série de MacLaurin

Study and application of the approximation of e^{x^2} using the MacLaurin series

Gabriel Pauluk Giaretta[1], Sabrina Fatima Canova[2]
Luan Maciel Ferreira[3], João Vitor Pizzoni Paulino[4],Dione Ines Christ Milani[5]

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo demonstrar a representação das séries infinitas de Taylor e MacLaurin, expondo suas aplicações para a resolução de funções as quais sem esse método teriam uma difícil resolução. Além disso, foi desenvolvido um programa na linguagem de programação em C o qual calcula essas aproximações pela Série de MacLaurin demonstrando os resultados.

Palavras-chave: Taylor, MacLaurin, polinômio, série, aproximação.

Abstract

The present work demonstrates the representation of Taylor and MacLaurin's infinite series, exposing their applications for solving functions which, without this method, would have a difficult approximation. In addition, a C program was developed which calculates these approximations by the MacLaurin series, demonstrating the results.

Keywords: Taylor, MacLaurin, polynomial, series, approximation.

Introdução

A Série de Taylor é extremamente importante para o estudo de métodos numéricos, já que torna possível a aproximação de funções por meio de um polinômio. Podendo ser usada para analisar o comportamento de uma função, e também, quando aproximada por um polinômio de grau apropriado, próximo ao ponto de interesse, isso permite manipular os polinômios em vez da função em si. Já a série de McLaurin representa um caso particular da série de Taylor, centrada na aproximação em torno de $a = 0$ zero(SILVA et al, 2021).

[1] Voluntário. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. E-mail: gabrielpaulukgiaretta@gmail.com. ID Lattes: 1177150971179194.
[2] Voluntário. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. E-mail: scanova@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 8887508100562086.
[3] Voluntário. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. E-mail: luanmf13@gmail.com. ID Lattes: 5160621510666317.
[4] Voluntário. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Toledo, Paraná, Brasil. E-mail: jpaulino@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 2201841350680822.
[5] Docente da COMAT da UTFPR – Campus Toledo. E-mail: dioneicmilani@utfpr.edu.br

No presente trabalho, será feita uma aproximação de e^{x^2} através da Série de MacLaurin, além disso, será realizada uma aproximação de valores por meio de um programa feito na linguagem C e posteriormente uma comparação de resultados.

Aplicações

Tem se a Série de Taylor representada por:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \quad (1)$$

Onde:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (2)$$

Desta forma, a Série de Taylor é definida como:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad (3)$$

A série de MacLaurin pode ser definida como um caso particular da série de Taylor centrando a aproximação em torno de $a = 0$ (SILVA et al, 2021). Desta forma a equação da Série de MacLaurin é representado por:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n \quad (4)$$

O polinômio de MacLaurin de grau n, pode ser definido da seguinte maneira:

$$P(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + f^{(2)}(0)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + ... + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \quad (5)$$

Desenvolvimento da aproximação e^{x^2} para a série de MacLaurin:

Pode-se deduzir a série de MacLaurin para $f(x) = e^{x^2}$ a partir do desenvolvimento utilizando $f(x) = e^x$, desta maneira, utilizando o polinômio da série de MacLaurin para e^x tem se as seguintes derivadas:

$$f(x) = f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) = ... = f^{(n)}(x) \quad (6)$$

Dessa forma, o polinômio da série de MacLaurin para e^x se dá por:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n!} \qquad (7)$$

A partir da equação encontrada, pode-se encontrar a Série de MacLaurin para $f(x) = e^{x^2}$ da seguinte forma:

A Série de Maclaurin para a função $f(x) = e^{u}$ é dada por:

$$e^{(u)} = 1 + u + \frac{(u)^2}{2!} + \frac{(u)^3}{3!} + ... + \frac{(u)^n}{n!} \qquad (8)$$

Fazendo $u = x^2$, tem-se $e^{u} = e^{x^2}$, e assim:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + ... + \frac{(x^2)^n}{n!} \qquad (9)$$

Os $M_n(x)$'s polinômios de Maclaurin para $f(x) = e^{x^2}$ são:

$$M_1(x) = 1 + x^2 \qquad (10)$$

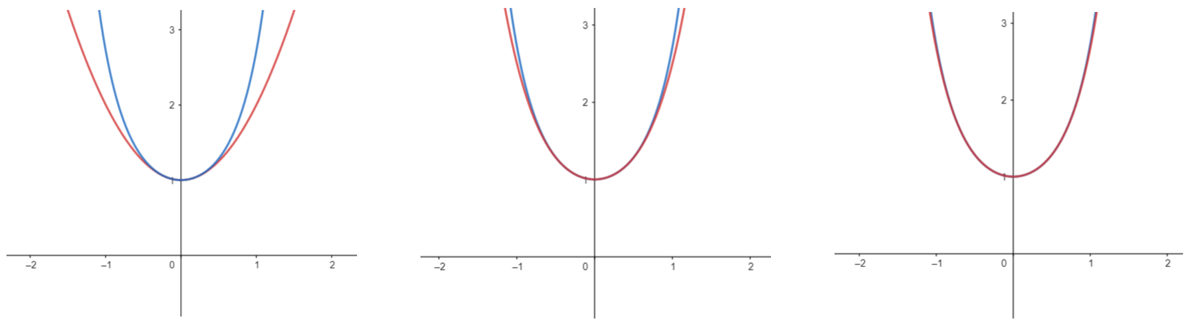
$$M_2(x) = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} \qquad (11)$$

$$M_3(x) = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} \qquad (12)$$

$$M_n(x) = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + ... + \frac{(x^2)^n}{n!} \qquad (13)$$

Nos gráficos a seguir pode-se ver como a série de MacLaurin converge para a função $f(x) = e^{x^2}$, ao passo que aumentando o grau do polinômio, aumenta-se também a precisão da função. Para um polinômio consideravelmente grande, o resultado irá convergir para a função. A Figura (1) mostra a aproximação para até um polinômio de grau 3

Figura 1 – Gráficos da série de MacLaurin



$M_1(x)$ $M_2(x)$ $M_3(x)$

Fonte: Dos autores.

Aplicando no Programa em C:

O código foi desenvolvido na linguagem C, para o cálculo da aproximação de e^{x^2}, através da série de MacLaurin, a partir de um x determinado, limitado por um tamanho de polinômio pré determinado. Sendo assim, foi criado duas funções recursivas, a primeira para calcular os fatoriais da função de MacLaurin, já a segunda foi desenvolvida para calcular através da função *pow* faz a exponenciação dos valores.

O código utilizado é apresentado a seguir:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

double fatorial( int n ) //função recursiva para o cálculo da fatorial
{
   if ( n <= 1 ) {
      return 1;
   }
   else {
      return  n*fatorial(n-1);
   }
}

double maclaurin (int n, double x) //função de MacLaurin
{
   if (n == 1){
      return 1+pow(x,2);
   }
```

```
    else {
        return pow(pow(x,2),n)/fatorial(n)+ maclaurin(n-1,x);
    }
}
int main(){
int n, x;
double y;
scanf("%d",&n);
scanf("%d",&x);
y = maclaurin(n, x); // valor de n e de x
printf("MacLaurin eh %g\n", y);

return 0;}
```

Ao calcularmos uma aproximação na calculadora para e^{2^2} obteve-se o seguinte resultado:

54,5981

Tendo em vista que n é igual ao tamanho do polinômio utilizado. Agora ao fazer o mesmo cálculo no programa têm-se os seguintes valores:

Tabela 1– com os resultados computados pelo código

Valor de n	Resultado da aproximação
2	13
4	34,3333
8	53.4317
16	54.5981

Fonte: Dos autores.

Ao calcularmos uma aproximação na calculadora para e^{3^2} obteve-se o seguinte resultado:

8103,0839

Tendo em vista que n é igual ao tamanho do polinômio utilizado. Agora ao fazendo o mesmo cálculo no programa têm-se os seguintes valores:

Tabela 2 – Tabela com os resultados computados pelo código

Valor de n	Resultado da aproximação
2	50,5
4	445.375
8	3692.19
16	8013.09
32	8103.08

Fonte: Dos autores.

Considerações finais

De acordo com os fatos supracitados, é perceptível que a série de MacLaurin apresenta uma boa aproximação para a equação e^{x^2}, ao determinar um possível valor para x. E assim como na série, o código implementado apresentou resultados satisfatórios para uma série que possui uma grande quantidade de termos do polinômio, mesmo que o código só apresenta duas casas depois da vírgula.

Disponibilidade de código

O código supracitado neste artigo foi desenvolvido pelos autores e se encontra disponível para terceiros.

Referências

DOS SANTOS, Eduardo Isidoro. **O Polinômio e Série de Taylor: Um estudo com aplicações.** 2017. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/handle/tede/9833. Acesso em: 20 de out. 2022.

ROSA, Carlos Fabiano et al. **Série de Taylor e aplicações.** 2012. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/105435. Acesso em: 20 de out. 2022.

SILVA, Erik Oliveira da et al. **Fórmula de Taylor e Aplicações de Derivadas.** 2021. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/22926. Acesso em: 20 de out. 2022.