



XIII Seminário de Extensão e Inovação XXVIII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR

Ciência e Tecnologia na era da Inteligência Artificial: Desdobramentos no Ensino Pesquisa e Extensão

20 a 23 de novembro de 2023 - Campus Ponta Grossa, PR

SEI-SICITE
2023

Oscilações lineares e não-lineares em Circuitos Elétricos



Linear and non-linear oscillations in Electrical Circuits

Laura Tokawa Morizaki¹, Alisson de Carvalho Reinol²

RESUMO

Neste trabalho, foi realizado o estudo das equações diferenciais e a análise do comportamento das oscilações de um pêndulo simples, obtendo-se as soluções e os retratos de fase para cada caso de oscilação do sistema. Por fim, foi apresentada a relação entre o pêndulo e os circuitos elétricos, concluindo que ambos os sistemas podem ser modelados utilizando o mesmo tipo de equações diferenciais.

PALAVRAS-CHAVE: circuitos elétricos; equações diferenciais; pêndulo simples; retrato de fase.

ABSTRACT

In this work the study of differential equations and the analysis of the oscillations' behavior of a simple pendulum were conducted, obtaining solutions and phase portraits for each case of system oscillation. Finally, the relationship between the pendulum and electrical circuits was presented, concluding that both systems can be modeled using differential equations.

KEYWORDS: electrical circuits; differential equations; simple pendulum; phase portrait.

INTRODUÇÃO

O estudo de equações diferenciais desempenha um papel fundamental na engenharia, fornecendo as ferramentas matemáticas necessárias para modelar e analisar uma ampla gama de problemas. A análise dos fenômenos oscilatórios se dá partindo da compreensão de sistemas simples, como o do pêndulo simples. A origem do pêndulo remonta as observações de Galileu, que notou que os períodos de oscilação do candelabro da catedral de Pisa eram consistentes, independentemente da amplitude. Christian Huygens demonstrou que o movimento de um pêndulo simples era quase síncrono para pequenas amplitudes e desenvolveu uma fórmula para calcular o período com base no comprimento da corda e na gravidade. Newton também contribuiu ao relacionar a massa com o peso e estudar a resistência do meio ao movimento pendular (KELLER et al, 1999).

Um pêndulo é um sistema em que uma massa é suspensa em um fio que é acoplado a um ponto fixo de uma superfície e que pode ser capaz de realizar um movimento linear (ARNOLD, 2011), como pode ser visto na Figura 1.

Deste modo, o objetivo deste trabalho é estudar as oscilações em pêndulos simples e relacioná-los com os circuitos elétricos em série, sendo possível obter as soluções e os retratos de fase para o comportamento dinâmico das soluções que modelam um pêndulo num campo gravitacional.

¹ Discente do Programa Institucional de Voluntariado em Iniciação Científica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: lauramorizaki@alunos.utfpr.edu.br

² Docente no Departamento Acadêmico de Matemática – DAMAT. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: alissonreinol@utfpr.edu.br. ID Lattes: 9116481919041637.



XIII Seminário de Extensão e Inovação

XXVIII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR

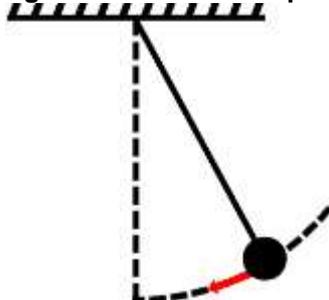
Ciência e Tecnologia na era da Inteligência Artificial: Desdobramentos no Ensino Pesquisa e Extensão

20 a 23 de novembro de 2023 - Campus Ponta Grossa, PR

SEI-SICITE
2023



Figura 1 - Pêndulo simples



Fonte: Autoria própria (2023).

MATERIAIS E MÉTODOS

Para o desenvolvimento deste trabalho, foi realizada a revisão bibliográfica a respeito dos conceitos básicos envolvendo a Teoria Geral das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), com base nos livros de BOYCE e DIPRIMA (2020) e ZILL, Dennis G. (2001) e a fim de realizar-se o estudo dos elementos básicos de circuitos elétricos, foi utilizado o livro BOYLESTAD, Robert L. (2012). O *software LTspice* foi utilizado para simular os circuitos elétricos e para analisar o comportamento dos mesmos, e os retratos de fase dos sistemas de EDOs foram obtidos utilizando-se o *software matemático Maple*.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

As oscilações de um pêndulo podem ser modeladas matematicamente por uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, obtida com base na Segunda Lei de Newton. Essa equação indica o comportamento dinâmico de um pêndulo num campo gravitacional, sujeito a um amortecimento linear e a um forçamento harmônico, e pode ser escrita em função deste amortecimento, como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\sigma \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin \theta = F \cos(\omega_d t) \quad (1)$$

onde θ é o deslocamento angular do pêndulo em relação ao eixo vertical, 2σ é o coeficiente de amortecimento, ω_0 é a frequência de movimento e $F \cos(\omega_d t)$ é o torque externo de amplitude F e frequência angular ω_d .

Os casos a serem estudados estão descritos abaixo.

1) Pêndulo linear não-amortecido e não forçado

Um pêndulo linear é não amortecido e não forçado quando $\sigma = 0$ e $F = 0$. Alguns sistemas físicos simples são descritos pela equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2)$$

sendo $\omega_0 > 0$ uma constante positiva. Essa equação, reescrita em termos de variáveis de estado, fazendo-se $dx/dt = y$, torna-se



XIII Seminário de Extensão e Inovação

XXVIII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR

Ciência e Tecnologia na era da Inteligência Artificial: Desdobramentos no Ensino Pesquisa e Extensão

20 a 23 de novembro de 2023 - Campus Ponta Grossa, PR

SEI-SICITE
2023



$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad (3)$$

A solução desse sistema diferencial é

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t). \quad (4)$$

Pode-se observar que os autovalores da matriz dos coeficientes do sistema (3) no ponto crítico (0,0) são $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_0$, onde j é a unidade imaginária, ou seja, são autovalores imaginários puros e o ponto crítico é chamado de centro, como pode ser observado na Figura 2 (a).

2) Pêndulo linear amortecido e não forçado

Um pêndulo linear é amortecido e não forçado quando $\sigma \neq 0$ e $F = 0$. Neste caso, não há oscilações que se perpetuam indefinidamente, pois sempre ocorre algum tipo de perda de energia nos sistemas. Esse amortecimento sofrido pelo pêndulo pode ser modelado pela equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\sigma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5)$$

Essa equação, reescrita em termos de variáveis de estado, fazendo-se $x' = y$, torna-se

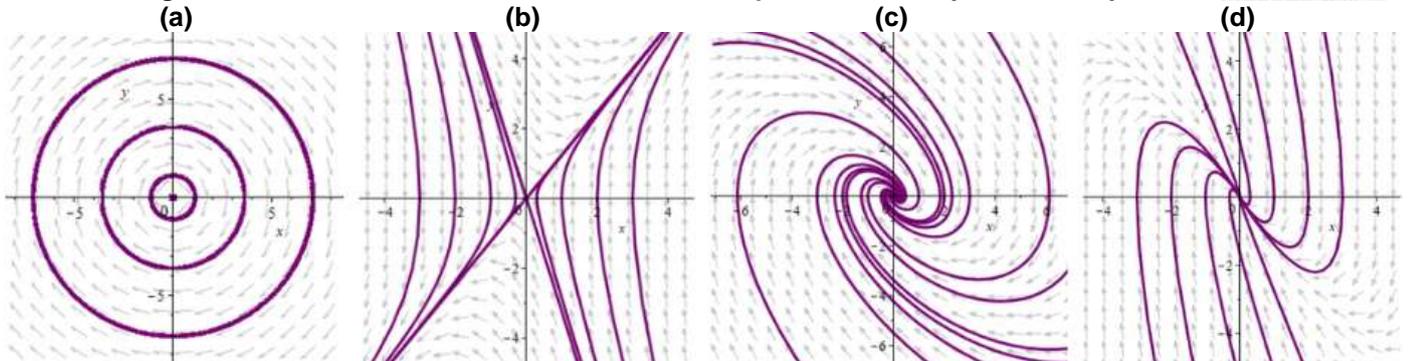
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x - 2\sigma y \end{cases} \quad (6)$$

O único ponto crítico desse sistema é a origem (0,0), e os autovalores são $\lambda_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2}$. Logo esse sistema depende da relação entre os parâmetros σ e ω_0 . Desse modo, tem-se três comportamentos possíveis:

- Movimento super-amortecido: Para $\sigma > \omega_0$, os autovalores são reais e negativos e a origem é um nó atrator. O pêndulo tende para a posição de equilíbrio sem oscilar em torno dela, como pode ser observado na Figura 2 (b);
- Movimento sub-amortecido: Para $\sigma < \omega_0$, os autovalores são complexos conjugados com parte real negativa de modo que a origem é um ponto espiral atrator. O pêndulo tende para o ponto de equilíbrio na origem, oscilando em torno deste ponto, conforme pode ser observado na Figura 2 (c);
- Movimento criticamente amortecido: Para $\sigma = \omega_0$, os autovalores são reais, iguais e negativos, de modo que a origem é um nó impróprio atrator. O pêndulo tende para a posição de equilíbrio sem passar por ela, como pode ser observado na Figura 2 (d).



Figura 2: Retratos de fase do sistema de EDO's que modelam o pêndulo simples



Fonte: Autoria própria através do software *Maple* (2023).

3) Pêndulo não-linear não-amortecido e não forçado

Um pêndulo não-linear é não amortecido e não forçado quando $\sigma = F = 0$. A equação (1) pode ser reescrita como um sistema não linear de duas equações de primeira ordem, da forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 \sin x \end{cases} \quad (7)$$

Os pontos críticos do sistema (7) são dados por $(2k\pi, 0)$ e $((2k + 1)\pi, 0)$, com $k \in \mathbb{Z}$. A matriz Jacobiana aplicada nestes pontos críticos são:

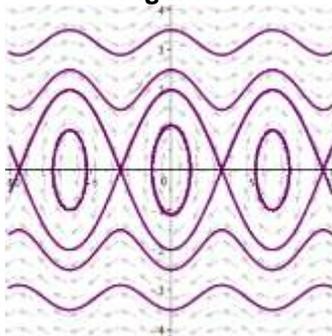
$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix},$$

cujos autovalores são, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} \omega_0 \\ -\omega_0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} j\omega_0 \\ -j\omega_0 \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema de Hartman-Grobman e pelo fato do sistema ser hamiltoniano, para mais informações consulte ANCHAPURI (2020), observe que os pontos críticos $(2k\pi, 0)$ são centros e os pontos críticos $((2k + 1)\pi, 0)$ são selas. O retrato de fase do sistema (7) é dado pela Figura 3.

Figura 3



Fonte: Autoria própria através do software *Maple* (2023).



XIII Seminário de Extensão e Inovação

XXVIII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR

Ciência e Tecnologia na era da Inteligência Artificial: Desdobramentos no Ensino Pesquisa e Extensão

20 a 23 de novembro de 2023 - Campus Ponta Grossa, PR

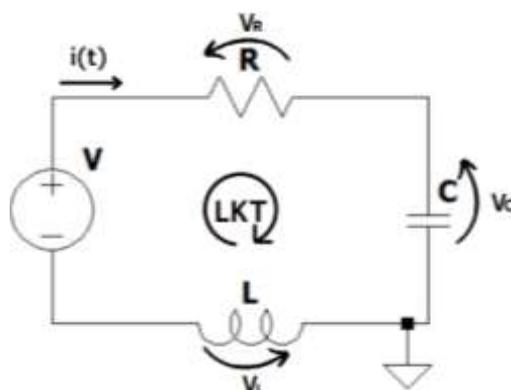
SEI-SICITE
2023



Estudo dos circuitos RLC série e sua analogia com o pêndulo

Agora, considere um circuito RLC, como mostrado na Figura 4, formado por um resistor de resistência R , um capacitor de capacitância C e um indutor com indutância L .

Figura 4



Fonte: Autoria própria através do software LTspice (2023).

O estudo do circuito descrito pela Figura 4 é análogo ao do pêndulo linear amortecido e não forçado. De fato, usando as Leis de Kirchhoff, obtemos que tal circuito é modelado pela EDO de segunda ordem abaixo:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0, \quad (8)$$

fazendo $i = \theta$, $\sigma = \frac{R}{2L}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, e considerando $\sin \theta = \theta$ (para θ suficientemente pequeno), observe que a equação (8) é análoga à equação (5), que descreve o comportamento do pêndulo linear amortecido e não forçado. Um exemplo da existência desta analogia é a relação entre o atrito do pêndulo e a resistência R no circuito elétrico. O atrito do fio de sustentação com o ar faz com que a amplitude de oscilação do pêndulo decresça com o tempo e, pelo Efeito Joule, os resistores dissipam energia elétrica no circuito RLC, fazendo com que a corrente tenda a zero com o passar do tempo. Assim, observa-se que oscilações não se perpetuam indefinidamente, pois sempre ocorre algum tipo de perda de energia nos sistemas.

CONCLUSÕES

Com a realização deste trabalho, foi possível estudar os movimentos oscilatórios do pêndulo e sua relação com o circuito RLC, analisando de maneira qualitativa as soluções dos sistemas de equações diferenciais utilizados para modelá-los. Foram estudados os seguintes casos: pêndulo linear não-amortecido e não forçado, os três casos de pêndulo linear amortecido e não forçado, pêndulo não-linear não-amortecido e não forçado e, por fim, a sua relação com os circuitos RLC.



XIII Seminário de Extensão e Inovação XXVIII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR

Ciência e Tecnologia na era da Inteligência Artificial: Desdobramentos no Ensino Pesquisa e Extensão

20 a 23 de novembro de 2023 - Campus Ponta Grossa, PR

SEI-SICITE

2023

AGRADECIMENTOS



Agradeço ao professor Alisson de Carvalho Reinol pela orientação e pela oportunidade deste trabalho e agradeço também a UTFPR pelo apoio no Programa Institucional de Iniciação Científica.

CONFLITO DE INTERESSE

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

ANCHAPURI, E. C. **Oscilações Lineares e Não Lineares em Circuitos Elétricos e Estudo de Circuitos Memristores Hamiltonianos**. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente. Presidente Prudente, p.99. 2020.

ARNOLD, F, J, et al. **Estudo do amortecimento do pêndulo simples: uma proposta para aplicação em laboratório de ensino**. Revista Brasileira de Ensino de Física. Sociedade Brasileira de Física, v. 33, n. 4, p. 4311-4311, 2011.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

BOYLESTAD, R. L. **Introdução à análise de circuitos** – 12. Ed. – São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2012.

KELLER, F. J., GETTYS, W. E, and SKOVE, M. J. **Física**, vol. 2. Pearson education do Brasil, São Paulo, 1999.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**, volume 1. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.