



Análise das principais técnicas de modelagem matemática para os conversores CC/CC Buck e Boost

Analysis of main mathematical modeling techniques for the DC/DC Buck and Boost converters

Beatriz Masquetti Pelz¹, Sebastián de Jesús Manrique Machado², Rodrigo do Santos Veloso Martins³ e Leonardo Bruno Garcia Campanhol⁴

RESUMO

Esse artigo tem como objetivo apresentar a modelagem matemática dos conversores CC/CC Buck e Boost, tanto para obtenção das equações de dimensionamento de seus elementos passivos quanto para sintonia de seus controladores. Devido ao fato de tais conversores possuírem circuitos equivalentes diferentes para cada etapa de operação, trazendo uma não linearidade em seu comportamento, se faz necessário obter um circuito linearizado para ambos antes de encontrar suas respectivas funções de transferência. Desse modo, inicialmente, esse trabalho traz um estudo das etapas de operação dos dois conversores e a obtenção do respectivo ganho estático. Em seguida, traz o estudo sobre três maneiras para obter o modelo médio de pequenos sinais dos conversores Buck e Boost, sendo eles o método por equações diferenciais, espaço de estados e circuito médio equivalente. Por fim, são obtidas as funções de transferência para ambos e aplicadas a um circuito exemplo para comparar a resposta teórica com a prática, de modo a analisar o impacto das aproximações realizadas no método de linearização.

PALAVRAS-CHAVE: Conversor CC/CC; linearização; modelagem.

ABSTRACT

This paper aims to show the mathematic modeling of the DC/DC Buck and Boost converters, both to obtain the sizing equations of its passive elements and to tune its controllers. Due to the fact that these converters have different equivalent circuits for each operation steps, bringing a non-linearity behavior, it's necessary to obtain a linearized circuit for both, before finding their transfer function. Thus, this paper initially brings a study of the operations steps of the two converters and the obtaining the static gain of both. After that, brings the study of three ways to obtain the small-signal model of the Buck and Boost converters, being them the differential equations method, state space and the medium equivalent circuit. Finally, it's obtained the transfer functions for both and applied in a example circuit to compare the theoretical with the practical answer, where it's possible to analyze the impact of the approximations made in the linearization method.

KEYWORDS: DC/DC converter; linearization; modeling.

INTRODUÇÃO

Os conversores CC/CC são dispositivos amplamente utilizados para controle do fluxo de potência entre dois ou mais sistemas. Tais dispositivos possuem a capacidade de alterar a relação de tensão/corrente entre a entrada e saída, além de trazerem um rendimento prático em torno de 70% a 98%. Para que isso ocorra, é utilizado o chaveamento de seus semicondutores de potência (BARBI, 2006).

Com o objetivo de compreender, estudar e controlar um sistema, faz-se necessário obter um modelo matemático do mesmo, por meio de relações matemáticas que refletem o

¹ Bolsista Voluntariada em Iniciação Científica - PIVIC. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: beatrizpelz@alunos.utfpr.edu.br. ID Lattes: 2450702055816920.

² Docente na Coordenação de Engenharia Elétrica - COELT-AP. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: sebastiand@utfpr.edu.br. ID Lattes: 2866118071883988.

³ Docente no Departamento Acadêmico Matemática - DAMAT-AP. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: rodrigomartins@utfpr.edu.br. ID Lattes: 0325051208358673.

⁴ Docente na Coordenação de Engenharia Elétrica - COELT-AP. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Apucarana, Paraná, Brasil. E-mail: campanhol@utfpr.edu.br. ID Lattes: 8053457373498978.

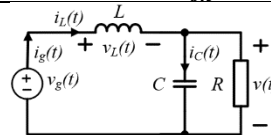
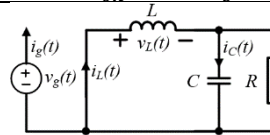
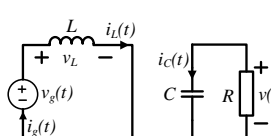
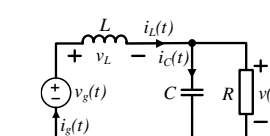
sistema abordado. Devido o chaveamento presente nos conversores, os mesmos possuem uma característica não linear, desse modo, é necessário adotar algum método de linearização para que seja possível representa-los por meio de uma função de transferência (BERTONE et al, 2014; OGATA, 2010). Assim, neste trabalho é apresentado três métodos para realização da linearização, além da modelagem e simulação para validação do modelo obtido dos conversores Buck e Boost.

CONVERSORES CC/CC

A estrutura geral dos conversores CC/CC é composta por uma fonte de entrada, uma entrada de controle (PWM), uma fonte de saída e o circuito propriamente dito, a depender de cada topologia. O circuito do conversor pode ser dividido em dois grupos: os semicondutores de potência (chaves e diodos) e os elementos armazenadores passivos (indutores e capacitores). Na Tabela 1 é possível visualizar a estrutura de potência do conversor Buck (abaixador) e Boost (elevador) (BARBI 2006; ERICKSON, 2001).

Com a aplicação do sinal PWM nas chaves de potência há uma alteração do circuito dentro do período de chaveamento T_s . Dessa forma, para avaliar o comportamento dos conversores é necessário considerar os circuitos equivalentes, que são formados quando a chave está fechada ($0 \leq t \leq t_{on}$) e aberta ($t_{on} \leq t \leq T_s$). Tais circuitos dos conversores Buck e Boost podem ser vistos na Tabela 1.

Tabela 1 – Conversores Buck e Boost e etapas de operação.

Conversor	$0 \leq t \leq t_{on}$	$t_{on} \leq t \leq T_s$
Buck		
Boost		

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

ETAPAS DE OPERAÇÃO

Analisando o circuito do conversor Boost em regime permanente, inicialmente no intervalo de tempo $0 \leq t \leq t_{on}$, verifica-se que a tensão no indutor $v_L(t) = V_g$ é uma constante positiva, assim sua corrente $i_L(t)$ é uma reta crescente, com valor inicial I_{Lmin} . Já no intervalo $t_{on} \leq t \leq T_s$, tem-se que a tensão no indutor $v_L(t) = V_g - V$ é uma constante negativa, logo a corrente $i_L(t)$ é uma reta decrescente que começa em $I_{Lmáx}$, e pode ser vista em (1). De maneira similar, obtém-se a corrente do indutor para o conversor Buck (2).

$$i_L(t) = \begin{cases} \frac{V_g}{L}t + I_{Lmin}, & 0 \leq t \leq t_{on} \\ \frac{(V_g - V)}{L}(t - t_{on}) + I_{Lmáx}, & t_{on} \leq t \leq T_s \end{cases} \quad (1)$$

$$i_L(t) = \begin{cases} \frac{1}{L}(V_g - V)t + I_{Lmin}, & 0 \leq t \leq t_{on} \\ -\frac{1}{L}V(t - t_{on}) + I_{Lmáx}, & t_{on} \leq t \leq T_s \end{cases} \quad (2)$$

GANHO ESTÁTICO

Para obter o ganho estático G dos conversores, é analisado a tensão média \bar{v}_L sobre o indutor L durante um período de chaveamento T_s . Tal valor, pode ser encontrado pela



integral do sinal sobre o período ou também pela área embaixo da curva. Sabendo que $\bar{V}_L = 0$ em regime permanente para os conversores operando no Modo de Condução Contínua (MCC) tem-se a média para o conversor Boost em (3) e para o Buck em (4).

$$\bar{V}_L = \frac{(V_g)(t_{on-0}) + (V_g - V)(T_s - t_{on})}{T_s} = 0 \quad (3) \quad \bar{V}_L = \frac{(V_g - V)(t_{on-0}) - (V)(T_s - t_{on})}{T_s} = 0 \quad (4)$$

Simplificando (1) e (2) e substituindo $D = t_{on}/T_s$, encontra-se as equações do ganho estático G dos conversores Boost (5) e Buck (6). Nota-se que o mesmo é dependente das tensões de entrada V_g e saída V e da razão cíclica D ou seja, da relação entre o período T_s e o tempo em que a chave se mantém em condução t_{on} .

$$G = \frac{V}{V_g} = \frac{1}{(1-D)} \quad (5) \quad G = \frac{V}{V_g} = D \quad (6)$$

MÉTODOS PARA OBTENÇÃO DO MODELO DINÂMICO LINEARIZADO DO CONVERSOR

Em todos os métodos aplicados o processo de linearização é similar, utilizando o conceito de pequenos sinais. Dessa forma, é negligenciado os grandes sinais, ou seja, as altas frequências presentes no chaveamento dos conversores, ficando somente com os pequenos sinais que são os efeitos dominantes e ditam a dinâmica do sistema (ERICKSON, 2001). Para isso, é realizado a média dos sinais dentro do período T_s , como a soma da área nos dois períodos de chaveamento.

Em seguida, é inserido uma perturbação, no qual considera-se que a média $\langle i(t) \rangle_{T_s}$ é composta de uma constante I e uma variação CA $\hat{i}(t)$, onde a relação $|\hat{i}(t)| \ll |I|$ é válida. Com as equações rearranjadas, as componentes CC se anulam e as componentes CA de segunda ordem são desprezadas, ficando somente com as componentes CA de primeira ordem e lineares. Tais componentes são constituídas pelo produto de componentes CA e CC, a última se trata do ponto de operação entorno do qual a linearização foi realizada.

Por meio desses passos, é realizada a modelagem do conversor Boost e Buck, no qual as equações finais podem ser vistas no Quadro 1 (PELZ et al., 2022).

Quadro 1 – Equações para Corrente do Indutor e Ganho Estático

	Buck	Boost
Equações Diferenciais	$L \frac{d\hat{i}_L(t)}{dt} = D\hat{v}_g(t) - \hat{v}(t) + \hat{d}(t)V_g$ $C \frac{d\hat{v}(t)}{dt} = \hat{i}_L(t) - \frac{\hat{v}(t)}{R}$ $\hat{i}_g(t) = \hat{d}(t)I_L + D\hat{i}_L(t)$	$L \frac{d\hat{i}(t)}{dt} = D\hat{v}_g(t) - \hat{v}(t) + \hat{d}(t)V_g$ $C \frac{d\hat{v}(t)}{dt} = \hat{i}(t) - \frac{\hat{v}(t)}{R}$ $\hat{i}_g(t) = \hat{d}(t)I + D\hat{i}(t)$
Espaço de Estados	$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{i}_L(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_L(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \hat{v}_g(t) + \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \end{bmatrix} \hat{d}(t)$ $\hat{i}_g(t) = [D \quad 0] \begin{bmatrix} \hat{i}_L(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} + [I_L] \hat{d}(t)$	$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{i}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -D \\ D' & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \hat{v}_g(t) + \begin{bmatrix} V \\ -I_L \end{bmatrix} \hat{d}(t)$ $\hat{i}_g(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \hat{i}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix}$
Cir. Médio Equivalente	$\hat{i}_1(t) = D\hat{i}_2(t) + I_2\hat{d}(t)$ $\hat{v}_2(t) = D\hat{v}_1(t) + V_1\hat{d}(t)$	$\hat{i}_2(t) = D'\hat{i}_1(t) - I_1\hat{d}(t)$ $\hat{v}_1(t) = D'\hat{v}_2(t) - V_2\hat{d}(t)$

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

No método por equações diferenciais é necessário encontrar as equações para os dois períodos de chaveamento, pelos circuitos equivalentes, e realizar a média dentro do período de chaveamento. Dessa forma, para o conversor Boost, tem-se em (7) a equação da tensão do indutor $v_L(t)$, da corrente do capacitor $i_c(t)$ e da corrente da fonte $i_g(t)$.

$$\begin{aligned} \langle v_L(t) \rangle_{T_s} &= L \frac{d\langle i_L(t) \rangle_{T_s}}{dt} = d(t) \langle (v_g(t))_{T_s} \rangle + d'(t) \langle (v_g(t))_{T_s} \rangle - \langle v(t) \rangle_{T_s} \\ \langle i_c(t) \rangle_{T_s} &= C \frac{d\langle v(t) \rangle_{T_s}}{dt} = -d(t) \frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{R} + d'(t) \left(\langle i(t) \rangle_{T_s} - \frac{\langle v(t) \rangle_{T_s}}{R} \right) \\ \langle i_g(t) \rangle_{T_s} &= d(t) \langle i_L(t) \rangle_{T_s} + d'(t) \langle i_L(t) \rangle_{T_s} \end{aligned} \quad (7)$$



Inserindo a perturbação e mantendo somente os termos CA de primeira ordem para a linearização, tem-se as equações diferenciais linearizadas por pequenos sinais do conversor Boost no Quadro 1.

Através de tais equações pode-se reconstruir o circuito dos conversores chegando ao circuito equivalente por pequenos sinais linear dos conversores na Tabela 2.

ESPAÇO DE ESTADOS

O segundo método estudado, refere-se à utilização da teoria de espaço de estados. Essa teoria se trata de descrever e analisar o sistema por meio equações matriciais pré-definidas. À vista disso, como os conversores CC/CC possuem dois circuitos equivalentes, em espaço de estados os mesmos terão dois grupos de equações, um para cada estágio:

$$K \frac{dx(t)}{dt} = A_1 x(t) + B_1 u(t) \quad (8) \quad K \frac{dx(t)}{dt} = A_2 x(t) + B_2 u(t) \quad (9)$$

$$y(t) = C_1 x(t) + E_1 u(t) \quad y(t) = C_2 x(t) + E_2 u(t)$$

Com essas equações base é realizado a média dentro do período de chaveamento, a perturbação e linearização de uma forma genérica. Assim, chega-se a uma equação base para o modelo linearizado por pequenos sinais dos conversores CC/CC (ERICKSON, 2001):

$$K \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t) + \left\{ \begin{matrix} (A_1 - A_2)X \\ +(B_1 - B_2)U \end{matrix} \right\} \hat{d}(t) \quad (10) \quad y(t) = C\hat{x}(t) + E\hat{u}(t) + \left\{ \begin{matrix} (C_1 - C_2)X \\ +(E_1 - E_2)U \end{matrix} \right\} \hat{d}(t) \quad (11)$$

$$A = DA_1 + D'A_2 \quad C = DC_1 + D'C_2$$

$$B = DB_1 + D'B_2 \quad E = DE_1 + D'E_2 \quad (12)$$

Entrando no conversor Boost, para obter as matrizes de (8) e (9), e assim substituir as matrizes em (10), (11) e (12), inicialmente é definido o vetor de estados, a entrada, a saída e a matriz K , respectivamente:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad u(t) = [v_g(t)] \quad y(t) = [i_g(t)] \quad K = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \quad (13)$$

Relacionando as equações encontradas no método anterior para cada período de chaveamento com (13) em (8) e (9), tem-se as matrizes $A_{1,2}$, $B_{1,2}$, $C_{1,2}$ e $E_{1,2}$ para substituir em (10), (11) e (12) e obter as matrizes que descrevem o circuito do modelo médio de pequenos sinais do conversor Boost, vistas no Quadro 1.

CIRCUITO MÉDIO EQUIVALENTE

No último método estudado, o circuito médio equivalente, as manipulações para linearização são realizadas somente no circuito de chaveamento do conversor. De tal forma, se tem uma interpretação mais física das alterações realizadas, já que será modificado diretamente no diagrama (ERICKSON, 2001). O circuito de chaveamento, é composto pelas chaves e diodos do conversor, como visto nos circuitos da Tabela 1.

As características originais do conversor são preservadas por meio das correntes ($i_1(t)$ e $i_2(t)$) e tensões ($v_1(t)$ e $v_2(t)$) do circuito de chaveamento. Inicialmente, os semicondutores são substituídos por fontes de corrente e tensão dependentes, e dentre as variáveis, são escolhidas duas que serão independentes e duas dependentes.

Para o conversor Boost, é definido que $i_1(t)$ e $v_2(t)$ são as variáveis independentes e $i_2(t)$ e $v_1(t)$ as variáveis dependentes. Já para o conversor Buck as variáveis dependentes escolhidas são $i_1(t)$ e $v_2(t)$, e as independentes são $i_2(t)$ e $v_1(t)$. Através



delas, é obtida as relações do conversor Boost para os dois estágios de operação e realizado a média dentro do período de chaveamento:

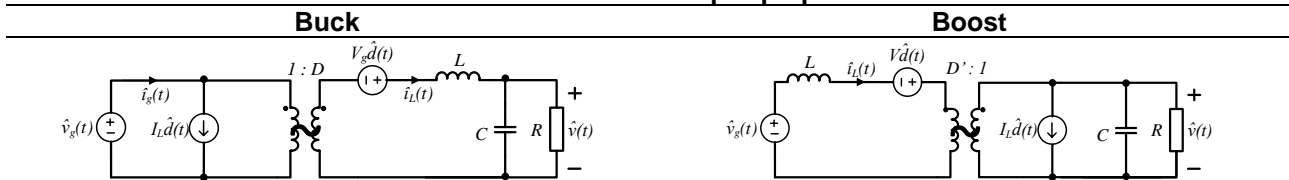
$$\begin{aligned} \langle i_2(t) \rangle_{T_s} &= d(t) * 0 + d'(t) \langle i_1(t) \rangle_{T_s} \\ \langle v_1(t) \rangle_{T_s} &= d(t) * 0 + d'(t) \langle v_2(t) \rangle_{T_s} \end{aligned} \quad (14)$$

Novamente, em (14) é inserido a perturbação e linearização, restando somente os termos CA de primeira ordem, visualizados no Quadro 1. A partir das equações linearizadas é reconstruído o circuito de chaveamento e reinserido entre os terminais do conversor.

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

A partir das equações linearizadas do Quadro 1, pode-se observar na Tabela 2 os circuitos equivalentes por pequenos sinais para cada conversor, sendo o mesmo independentemente do método utilizado. Tal circuito, é composto por duas entradas $\widehat{v}_g(t)$ e $\widehat{d}(t)$ e uma saída $v(t)$, dessa forma a função de transferência é obtida por meio do teorema da superposição, considerando condições iniciais nulas.

Tabela 2 – Circuito linearizado por pequenos sinais.



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Com isso, a modelagem se inicia aplicando a transformada de Laplace nos elementos da Tabela 2. Em seguida, encontra-se G_{vg} com $\widehat{d}(s) = 0$ e $G_{vd}(s)$ com $\widehat{v}_g(s) = 0$ para o conversor Boost:

$$G_{vd}(s) = \frac{\widehat{v}(s)}{\widehat{d}(s)} = \frac{V}{D'} \left(\frac{1 - \frac{L}{RD'^2s}}{1 + \frac{LC}{D'^2s^2} + \frac{L}{RD'^2s}} \right) \quad (15) \quad G_{vg}(s) = \frac{\widehat{v}(s)}{\widehat{v}_g(s)} = \frac{1}{D'} \left(\frac{1}{\frac{LC}{D'^2s^2} + \frac{Ls}{D'^2R} + 1} \right) \quad (16)$$

da mesma forma para o conversor Buck:

$$G_{vd}(s) = \frac{\widehat{v}(s)}{\widehat{d}(s)} = \frac{V}{D} \left(\frac{1}{1 + \frac{Ls}{R} + LCs^2} \right) \quad (17) \quad G_{vg}(s) = \frac{\widehat{v}(s)}{\widehat{v}_g(s)} = D \left(\frac{1}{1 + \frac{Ls}{R} + LCs^2} \right) \quad (18)$$

SIMULAÇÃO (RESULTADOS)

Com o intuito de comparar se as funções de transferência obtidas correspondem à dinâmica real do circuito, foram realizadas simulações dos circuitos mostrados na Tabela 1 e comparado com as respostas das funções de transferência (15), (16), (17) e (18). Foi inserido uma entrada degrau, tanto na fonte de entrada V_g quanto na razão cíclica D .

Dessa forma, os valores correspondentes nas simulações do conversor Boost são:

$$V = 24V, \quad V_g = 14V, \quad f_s = 20kHz, \quad L = 288\mu H, \quad C = 86,8\mu F, \quad R = 11,52\Omega \quad (19)$$

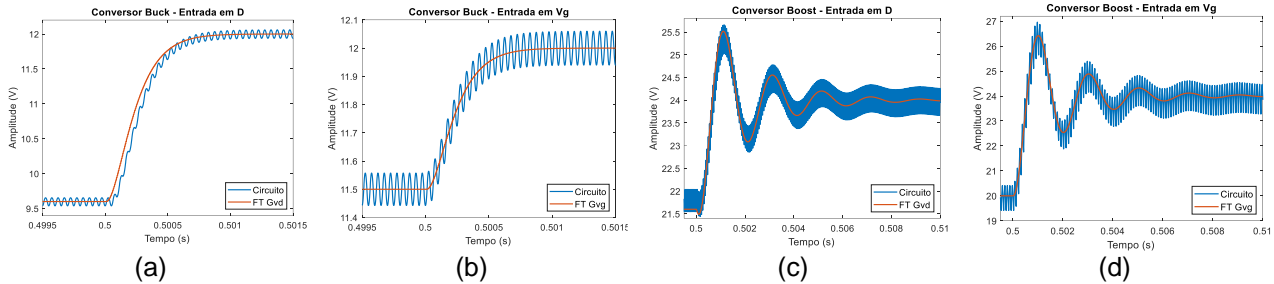
assim como para o conversor Buck:

$$V = 12V, \quad V_g = 24V, \quad f_s = 20kHz, \quad L = 1,8mH, \quad C = 8,68\mu F, \quad R = 7,2\Omega \quad (20)$$

Na simulação do conversor Boost, primeiramente foi comparado o circuito com a função de transferência G_{vd} (15), por meio da aplicação de um degrau de 0,05 de variação na razão cíclica D . Em seguida a comparação foi feita com G_{vg} (16), por meio da aplicação de um degrau de 2V de variação na fonte de entrada V_g . Do mesmo modo, para o conversor Buck foi realizado a comparação do circuito com G_{vd} (17), aplicando um degrau de 0,1 de

variação na razão cíclica D . E em G_{vg} (18), aplicando um degrau de $1V$ de variação na fonte de entrada V_g . As respostas para os dois conversores podem ser vistas na Figura 1.

Figura 1 – Resposta ao degrau. (a) Entrada D para o conversor Boost; (b) Entrada V_g para o conversor Boost; (c) Entrada D para o conversor Buck; (d) Entrada V_g para o conversor Buck.



Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

CONCLUSÃO

Esse artigo apresentou três técnicas para modelagem dos conversores CC/CC Buck e Boost. Entre essas, consta o método das equações diferenciais, espaços de estados e circuito médio equivalente. Por meio dessas, foi obtido as funções de transferência de cada conversor e comparada com a simulação do circuito.

Em todos os casos foi utilizado o método de perturbação e linearização por pequenos sinais, no qual negligenciava as altas frequências presentes no chaveamento. Tal característica, é notada nos resultados finais de simulação, já que as respostas pelas funções de transferência apresentam um comportamento com menor oscilação em relação as respostas dos circuitos, isso se deve ao fato, dela não possuir a variação oriunda do chaveamento dos semicondutores de potência.

Agradecimentos

Os autores agradecem a UTFPR-AP/COELT-AP pela estrutura disponibilizada para estudos e pesquisas.

Conflito de interesse

Não há conflito de interesse.

REFERÊNCIAS

- BARBI, I. **Eletrônica de Potência**. 6ª Edição ed. Florianópolis: ed. Do Autor, 2006.
- BERTONE, A. M. A. et al. **Modelagem Matemática**. ed. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia; Universidade Aberta do Brasil Centro de Educação a Distância, 2014.
- ERICKSON, Robert; MAKSIMOVIC, Dragan. **Fundamentals of Power Electronics**. Second Edition. ed. New York: Kluwer Academic, 2001. 883 p. ISBN 0-7923-7270-0.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5 Edição ed. São Paulo: Pearson Education Brasil, 2010. ISBN 978-85-365-1830-5
- PELZ, B. M. et al. **Análise das principais técnicas de modelagem matemática para conversores CC/CC operando no modo de condição contínua**. XII Seminário de Extensão e Inovação & XXVII Seminário de Iniciação Científica e Tecnológica da UTFPR. Anais...Even3, 29 dez. 2022. Disponível em: <<https://www.even3.com.br/anais/seisicite2022/546924-analise-das-principais-tecnicas-de-modelagem-matematica-para-conversores-cccc-operando-no-modo-de-condicao-conti/>>. Acesso em: 10 de agosto. 2023